Die Gödel'schen Sätze Serie 6

Modelle: Logische Axiome & Kompaktheitssatz Musterlösung

25. Sei $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ das Axiomenschema $(\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big)$. In Aufgabe 12 wurde $\big\{\mathsf{L}_0, \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_8, \mathsf{L}_9\big\} \vdash \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ gezeigt.

Zeige: $\big\{\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\big\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

Lösung:

Wir verwenden das Deduktionstheorem und zeigen $\big\{\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}, \varphi\big\} \vdash \neg\neg\varphi$. Dazu vergewissern wir uns, dass wir im Beweis des Deduktionstheorems nur L_1, L_2 und L_{12} verwendet haben. Im vorliegenden Fall benötigen wir keine Quantoren, also brauchen wir L_{12} nicht.

$$
\begin{array}{rl}
\mathsf{T} \ni \mathsf{L}_1 & \varphi \to (\neg\varphi \to \varphi) \\
\mathsf{T} \ni & \varphi \\
\mathsf{MP} & \neg\varphi \to \varphi \\
\mathsf{T} \ni \mathsf{L}_1 & \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\varphi) \\
\mathsf{T} \ni \mathsf{L}_2 & \big(\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\varphi)\big) \to \big((\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)\big) \\
\mathsf{MP} & (\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi) \\
\mathsf{MP} & \neg\varphi \to \neg\varphi \\
\mathsf{T} \ni \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}} & (\neg\varphi \to \varphi) \to \big((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi\big) \\
\mathsf{MP} & (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi \\
\mathsf{MP} & \neg\neg\varphi
\end{array}
$$

26. Sei $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ wie oben.

(a) Zeige: $\big\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9\big\} \nvdash \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$

(b) Zeige: $\big\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\big\} \nvdash \mathsf{L}_0$

(c) Zeige: $\big\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\big\} \nvdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (zur Erinnerung: $\{\mathsf{L}_0\text{–}\mathsf{L}_9\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$)

Folgerung: Einerseits lässt sich $\neg\neg\varphi \to \varphi$ nicht ohne L_0 beweisen, selbst wenn wir $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ hinzunehmen; andererseits lässt sich $\varphi \to \neg\neg\varphi$ aus $\big\{\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\big\}$ beweisen, also ohne L_0.

Lösung:

(a) Wir definieren eine Betragsfunktion $|\ \ |$, die jeder Formel φ einen Wert $|\varphi| \in \{-1, 0, 1\}$ zuweist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$|\varphi \vee \psi| = \max\{|\varphi|, |\psi|\}, \quad |\varphi \wedge \psi| = \min\{|\varphi|, |\psi|\}, \quad |\neg\varphi| = -|\varphi|$$

und die Werte von $|\varphi \to \psi|$ hängen wie folgt von $|\varphi|$ und $|\psi|$ ab:

$|\varphi|$ \ $|\psi|$	-1	0	1
-1	1	1	1
0	1	1	1
1	-1	0	1

Nun ist zu zeigen, dass für jede Formel θ mit $\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9\} \vdash \theta$ gilt, dass $|\theta| = 1$, während wir für gewisse Werte von $|\varphi|$ und $|\psi|$ haben, dass $|\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}| \neq 1$.

Es genügt zu zeigen, dass für jedes Axiom $\mathsf{L}_i \in \{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9\}$ gilt, dass $|\mathsf{L}_i| = 1$, und dass MODUS PONENS verträglich mit $|\ \ |$ ist, d. h. dass aus $|\varphi| = 1$ und $|\varphi \to \psi| = 1$ folgt, dass $|\psi| = 1$. Die VERALLGEMEINERUNGSREGEL dürfen wir ignorieren, da $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ keine Quantoren enthält.

Wir zeigen zum Beispiel $|\mathsf{L}_1| = 1$ mit Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gälte $|\varphi \to (\psi \to \varphi)| \neq 1$. Dann würde folgen, dass $|\varphi| = 1$ und $|\psi \to \varphi| \neq 1$, woraus wiederum $|\psi| = 1$ und $|\varphi| \neq 1$ folgen würde, im Widerspruch zu $|\varphi| = 1$.

Analog können wir bei den anderen Axiomen vorgehen. Bei L_3, L_4, L_6 und L_7 können wir auch verwenden, dass $|\chi_1 \to \chi_2| = 1$ aus $|\chi_1| \leq |\chi_2|$ folgt.

In der obigen Tabelle sehen wir, dass aus $|\varphi| = 1$ und $|\varphi \to \psi| = 1$ folgt, dass $|\psi| = 1$. Also ist MODUS PONENS verträglich mit $|\ \ |$.

Wenn für φ in $\theta :\equiv (\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big)$ gilt, dass $|\varphi| = 0$, dann gilt auch $|\theta| = 0$, also ist eine Aussage der Form θ nicht beweisbar aus $\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9\}$.

(b) Dies folgt aus (c).

(c) Wir definieren wiederum eine Betragsfunktion $|\ \ |$, die jeder Formel φ einen Wert $|\varphi| \in \{-1, 0, 1\}$ zuweist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$|\varphi \vee \psi| = \max\{|\varphi|, |\psi|\}, \quad |\varphi \wedge \psi| = \min\{|\varphi|, |\psi|\}$$

und die Werte von $|\neg\varphi|$ und $|\varphi \to \psi|$ hängen wie folgt von $|\varphi|$ und $|\psi|$ ab:

$|\varphi|$	-1	0	1
$|\neg\varphi|$	1	-1	-1

$|\varphi|$ \ $|\psi|$	-1	0	1
-1	1	1	1
0	-1	1	1
1	-1	0	1

$|\varphi \to \psi|$

Wir gehen analog zu Teil (a) vor.

Wenn schliesslich für φ in $\theta :\equiv \neg\neg\varphi \to \varphi$ gilt, dass $|\varphi| = 0$, dann gilt auch $|\theta| = 0$, also ist eine Aussage der Form θ nicht beweisbar aus $\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9\}$.

27. Sei T das Axiomensystem der rationalen Zahlen. Wenn wir, wie dies üblich ist, das Modell einer Theorie mit dem Bereich des Modells identifizieren, so können wir schreiben $\mathbb{Q} \models \mathsf{T}$. Wir erweitern nun T zu T^* wie folgt: $\mathscr{L}_{\mathsf{T}^*} = \mathscr{L}_{\mathsf{T}} \cup \{\delta\}$, wobei δ ein Konstantensymbol ist, und es sei $\mathsf{T}^* = \mathsf{T} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei φ_n die Formel $0 < \delta \wedge \delta < \frac{1}{n}$ ist.

Aus dem Kompaktheitssatz folgt $\mathrm{Con}(\mathsf{T}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{T}^*)$, und mit dem Vollständigkeitssatz erhalten wir: Existiert ein Modell $\mathbb{Q}$ für die Theorie der rationalen Zahlen, so exisitert auch ein Modell $\mathbb{Q}^*$ für die erweiterte Theorie T^*.

(a) Gibt es einen $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$-Satz φ der in einer der beiden Theorien T oder T^* beweisbar ist, in der anderen aber nicht?

(b) Zeige, dass $\delta^{\mathbb{Q}^*}$ kleiner ist als jede positive rationale Zahl aus $\mathbb{Q}$.

(c) Entscheide, ob im Modell $\mathbb{Q}^*$ ein $x \in \mathbb{Q}$ existiert, so dass für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\left(|x - \delta^{\mathbb{Q}^*}| < |y - \delta^{\mathbb{Q}^*}|\right) \vee x = y$$

(d) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden einen sogenannten *archimedischen Körper*; das heisst, für jedes $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ existiert eine natürliche Zahl n, so dass gilt:

$$n \cdot |x| > 1$$

Ist $\mathbb{Q}^*$ ebenfalls ein archimedischer Körper?

Lösung:

(a) Nein. Alle Axiome in $\mathsf{T}^* \setminus \mathsf{T}$ sind Aussagen über δ, aber wir können keine $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$-Sätze über δ formulieren. Ausserdem finden wir bereits in $\mathbb{Q}$ Zeugen für die Kojunktion endlich vieler Aussagen der Form $\exists x(0 < x \wedge x < \frac{1}{n})$.

(b) Sei $x \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dann gilt $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}_{>0}$ und es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass $n > \frac{1}{x}$. Da beide Zahlen positiv sind, folgt daraus $\frac{1}{n} < x$ und (mit φ_n) $\delta < x$.

(c) Ja, $x = 0$. Denn $|x - \delta^{\mathbb{Q}^*}| = |-\delta^{\mathbb{Q}^*}| = \delta^{\mathbb{Q}^*}$ und $|y - \delta^{\mathbb{Q}^*}| \geq |y| - \delta^{\mathbb{Q}^*}$. Nun gilt entweder $y = 0$ oder $|y| > 2\delta^{\mathbb{Q}^*}$ nach (27b), also $|y| - \delta^{\mathbb{Q}^*} > \delta^{\mathbb{Q}^*}$, was die Ungleichung vervollständigt.

(d) Um sicher zu sein, dass bereits $\mathbb{Q}$ ein ein archimedischer Körper ist, muss dies aus den Axiomen folgen. Also ist $\mathbb{Q}^*$ ebenfalls ein archimedischer Körper, allerdings mit anderen natürlichen Zahlen.