Die Gödel'schen Sätze

Serie 5

formale Beweise, Modelle, Kompaktheitssatz

Musterlösung

---

22. Sei "e" ein Konstantensymbol und "$\circ$" ein binäres Funktionssymbol.

Zeige: $\big\{\forall x\forall y\big(y\circ x = \mathsf{e} \to x\circ y = \mathsf{e}\big),\ \forall x\exists y\big(y\circ x = \mathsf{e}\big)\big\} \vdash \forall x\exists y\big(x\circ y = \mathsf{e}\big)$

Hinweis: Zeige zuerst allgemein (*z.B.* mit einem Widerspruchsbeweis) dass gilt:

$$\big\{\forall y\big(\varphi(y) \to \psi(y)\big),\ \exists y\,\varphi(y)\big\} \vdash \exists y\,\psi(y)$$

Lösung:

$\mathsf{T} \ni$	$\forall y\big(\varphi(y) \to \psi(y)\big)$
$\mathsf{L}_{10} + \mathsf{MP}$	$\varphi(y) \to \psi(y)$
Aufgabe 6	$\neg\psi(y) \to \neg\varphi(y)$
Annahme	$\neg\exists y\,\psi(y)$
$(\mathsf{S.1}) + \mathsf{MP}$	$\forall y\,\neg\psi(y)$
$\mathsf{L}_{10} + \mathsf{MP}$	$\neg\psi(y)$
MP	$\neg\varphi(y)$
$(\forall)$	$\forall y\,\neg\varphi(y)$
$(\mathsf{T}) + \ldots$	$\neg\exists y\,\neg\neg\varphi(y)$
$(\mathsf{R.2}) + \ldots$	$\neg\exists y\,\varphi(y)$
$\mathsf{T} \ni$	$\exists y\,\varphi(y)$
	Widerspruch.

Für den ursprünglichen Beweis verwende zusätzlich Verallgemeinerung und L_{10}.

23. DLO bezeichne die Theorie der *dichten linearen Ordnungen*: Die Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}}$ besteht aus der 2-stelligen Relation "$<$", und die nicht-logischen Axiome von DLO sind:

DLO_1	$\forall x\neg(x < x)$
DLO_2	$\forall x\forall y\forall z\,\big((x < y \wedge y < z) \to x < z\big)$
DLO_3	$\forall x\forall y\,(x < y \vee x = y \vee y < x)$
DLO_4	$\forall x\forall y\exists z\,\big(x < y \to (x < z \wedge z < y)\big)$
DLO_5	$\forall x\exists y\exists z\,(y < x \wedge x < z)$

(a) Konstruiere ein Modell für DLO mit dem Bereich $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

(b) Zeige, dass zwei abzählbare Modelle von DLO immer isomorph sind.

Lösung:

(a) Für $\langle x_0, x_1, x_2\rangle, \langle y_0, y_1, y_2\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ setze zum Beispiel:

$$\langle x_0, x_1, x_2\rangle < \langle y_0, y_1, y_2\rangle :\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 <_{\mathbb{N}} y_0 \\ x_0 =_{\mathbb{N}} y_0 \wedge x_1 <_{\mathbb{Z}} y_1 \\ x_0 =_{\mathbb{N}} y_0 \wedge x_1 =_{\mathbb{Z}} y_1 \wedge x_2 <_{\mathbb{Q}} y_2 \end{cases}$$

(b) Ohne Einschränkung (bzw. bis auf Bijektion von Mengen) können wir zwei Modelle mit Bereich $\mathbb{N}$ und (potentiell) verschiedenen Ordnungen betrachten, also $(\mathbb{N}, <_a)$ und $(\mathbb{N}, <_b)$.
Wir definieren den Isomorphismus f induktiv: $f(0) := 0$.
Für $i > 0$ gilt nach DLO_4 und DLO_5

$$\exists n_i \in \mathbb{N} : \forall j < i : \quad j <_a i \Rightarrow f(j) <_b n_i \quad \wedge \quad i <_a j \Rightarrow n_i <_b f(j) \tag{1}$$

Setze $f(i) := \min_{\mathbb{N}} \big\{n \in \mathbb{N} \setminus \{f(0), \ldots, f(i-1)\} \ : \ n \text{ erfüllt } (1)\big\}$.
Dabei garantiert der Ausschluss von $\{f(0), \ldots, f(i-1)\}$, dass f injektiv wird, und $\min_{\mathbb{N}}$ sowie die Dichtheit von $(\mathbb{N}, <_a)$, dass f surjektiv wird.

24. Zeige: Hat eine Theorie T beliebig grosse endliche Modelle, so hat T auch ein unendliches Modell.

Lösung:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell $\mathbf{M}_n \models \mathsf{T}$ mit $|\mathbf{M}_n| \geq n$.

Sei weiter $C := \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Menge von Konstantensymbolen, $\mathscr{L}_{\mathsf{T}_\omega}$ die Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{T}} \cup C$, für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_{m\,n}$ der Satz $c_m \neq c_n$ und T_ω die $\mathscr{L}_{\mathsf{T}_\omega}$-Theorie

$$\mathsf{T} \cup \{\varphi_{m\,n}\}_{m \neq n}^{m,n \in \mathbb{N}} .$$

Für jedes $\mathsf{T}_n \subseteq \mathsf{T}_\omega$ mit $|\mathsf{T}_n| = n$ gilt nun $\mathbf{M}_n \models \mathsf{T}_n$. Nach dem Kompaktheitssatz auf Modellebene gibt es also ein Modell $\mathbf{M}_\omega \models \mathsf{T}_\omega$. Dessen Bereich muss unendlich sein, um alle Sätze in $\{\varphi_{m\,n}\}_{m \neq n}^{m,n \in \mathbb{N}}$ wahr zu machen.