18. Beweise formal die folgende Tautologie:

$$\vdash \exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$$

Hinweise: Mit L_{10} (neue Nummerierung) haben wir $\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi$. Ferner wurde in Aufgabe 6.(c) $\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$ gezeigt.

Lösung:

Wir verwenden einige Resultate aus Aufgabe 6, um den Beweis etwas abzukürzen:

L_{10}	$\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi$
$6.(b)$	$(\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi)$
MP	$\neg\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$
$6.(d)$	$\varphi \to \neg\neg\varphi$
$6.(a)$	$\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$
$(\forall)$	$\forall x(\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi)$
L_{13}	$\forall x(\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi) \to (\exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi)$
MP	$\exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$

Vielen Dank auch an den Stuenten Greg Weiler, der die folgende alternative Lösung gefunden hat. Zuerst lässt sich $\exists x\varphi \vdash \neg\forall x\neg\varphi$ zeigen:

L_{10}	$\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi$
$6.(c)$	$(\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi)$
MP	$\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$
$(\forall)$	$\forall x(\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi)$
L_{13}	$\forall x(\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi) \to (\exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi)$
MP	$(\exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi)$
$\mathsf{T} \ni$	$\exists x\varphi$
MP	$\neg\forall x\neg\varphi$

Mit dem Deduktionstheorem (DT) folgt nun die Aussage $\vdash \exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$.

19. Die $\mathscr{L}$-Formeln φ_{11} und φ_{13} seien Instantiierungen der logischen Axiome L_{11} *bzw.* L_{13}. Weiter sei $\mathbf{M}$ ein Modell einer $\mathscr{L}$-Theorie.

Zeige, dass gilt:

$$\mathbf{M} \models \varphi_{11} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} \models \varphi_{13}$$

Lösung:

Sei A der Bereich von $\mathbf{M}$, j eine beliebige Variablen-Belegung und $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$ die entsprechende $\mathscr{L}$-Interpretation.

Nach geeigneten Umformungen bleibt für $\mathbf{M} \models \varphi_{11}$ zu zeigen, dass gilt:

$$\text{If } \mathbf{I} \models \varphi(\tau) \text{ then there exists } a \text{ in } A\text{: } \mathbf{I}\tfrac{a}{\nu} \models \varphi(\nu).$$

Dies lässt sich erreichen, indem wir $a = \mathbf{I}(\tau)$ wählen.

Die Umformung in der zweiten Teilaufgabe ist aufwendiger, aber nicht schwieriger.

20. Sei $\mathscr{L}$ eine abzählbare Signatur und sei für jede konsistente Menge Φ von $\mathscr{L}$-Sätzen $\mathbf{M}_\Phi \models \Phi$ ein Modell (dieses existiert nach dem Vollständigkeitssatz). Ferner sei

$$\Sigma := \{\mathbf{M}_\Phi : \Phi \text{ ist Menge von } \mathscr{L}\text{-Sätzen und es gilt } \mathrm{Con}(\Phi)\}$$

und für jeden $\mathscr{L}$-Satz φ sei

$$X_\varphi := \{\mathbf{M} \in \Sigma : \mathbf{M} \models \varphi\}.$$

Definiere nun die offenen Mengen als die kleinsten Menge, welche alle X_φ enthält.

(a) Zeige, dass die Mengen X_φ eine Basis der Topologie bilden.

(b) Zeige, dass die Mengen X_φ abgeschlossen ist.

(c) Zeige mit dem Kompaktheitssatz, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält (d.h. der topologische Raum Σ ist kompakt).

Beweis:

(a) Zwei Dinge sind zu zeigen:

- Die X_φ überdecken ganz Σ.
- Für beliebige X_φ, X_χ sowie beliebiges $\mathbf{M} \in X_\varphi \cap X_\chi$ gibt es X_ρ so, dass $\mathbf{M} \in X_\rho$.

Die erste Aussage folgt aus $\mathbf{M} \in X_\varphi \cup X_{\neg\varphi} = \Sigma$ für einen beliebigen $\mathscr{L}$-Satz φ. Die zweite Aussage folgt aus $X_\varphi \cap X_\chi = X_{\varphi\wedge\chi}$.

(b) Es gilt für einen beliebigen $\mathscr{L}$-Satz φ:

$$X_\varphi = \Sigma \setminus X_{\neg\varphi}.$$

(c) Sei $\bigcup_{i\in I} A_i = \Sigma$ eine beliebige offene Überdeckung. Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen es gibt keine endliche Teilüberdeckung $J \subseteq I$ so, dass $\bigcup_{j\in J} A_j = \Sigma$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall J \subseteq I \text{ endlich} : \quad & \bigcup_{j\in J} A_j \neq \Sigma \\ \forall J \subseteq I \text{ endlich} : \quad & \bigcap_{j\in J} \Sigma \setminus A_j \neq \emptyset \qquad (1) \end{aligned}$$

Da die $\Sigma \setminus A_j$ abgeschlossen sind und da die X_φ auch eine Basis der abgeschlossenen Mengen bilden, gibt es eine Menge von $\mathscr{L}$-Sätzen Φ_j so, dass $\Sigma \setminus A_j = \bigcap_{\varphi\in\Phi_j} X_\varphi$. Sei $\Phi = \bigcup_{i\in I} \Phi_i$. Dann folgt aus (1) insbesondere:

$$\begin{aligned} \forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich} : \quad & \bigcap_{\varphi\in\Phi'} X_\varphi \neq \emptyset \\ \forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich} : \quad & \exists\, \mathbf{M}' \in \bigcap_{\varphi\in\Phi'} X_\varphi \\ \forall \Phi' \subseteq \Phi \text{ endlich} : \quad & \exists\, \mathbf{M}' \models \Phi' \end{aligned}$$

Daraus folgt mit dem semantischen Kompaktheitssatz, dass es ein Modell $\mathbf{M}$ für Φ gibt. Dies bedeutet wiederum, dass $\bigcap_{i\in I} \Sigma \setminus A_i = \bigcap_{\varphi\in\Phi} X_\varphi \neq \emptyset$ im Widerspruch zu $\bigcup_{i\in I} A_i = \Sigma$.

21. Sei $\mathscr{L} = \{\mathsf{e}, \circ\}$ die Sprache der Gruppentheorie. Die $\mathscr{L}$-Theorie T bestehe aus folgenden drei $\mathscr{L}$-Sätzen:

- $\forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$
- $\forall x \big(\mathsf{e} \circ x = x\big)$
- $\forall x \exists y \big(x \circ y = \mathsf{e}\big)$

Zeige: $\quad \mathsf{T} \not\vdash \forall x \big(x \circ \mathsf{e} = x\big) \ \vee\ \forall x \exists y \big(y \circ x = \mathsf{e}\big)$

Lösung:

Betrachte ein Modell $\mathbf{M}$ mit Bereich $\{a, b\}$ und:

$\circ$	a	b
a	a	b
b	a	b

Dann haben wir $\mathsf{e}^{\mathbf{M}} = a$ und alle Axiome sind erfüllt. Ausserdem gilt

$$b \circ a = a \ \wedge\ \forall y (y \circ b = b),$$

was zu zeigen war.