Die Gödel'schen Sätze

Serie 3

Modelle

Musterlösung

13. Konstruiere für jede der folgenden beiden Theorien zwei Modelle: jeweils ein Modell mit einem möglichst kleinen Bereich und jeweils ein Modell mit einem Bereich welcher genau fünf Objekte besitzt.

(a) $\mathsf{PA} \setminus \{\mathsf{PA}_0\}$

(b) $\mathsf{PA} \setminus \{\mathsf{PA}_1\}$

Lösung:

1. Ein minimales Modell ist der Nullring, $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, +, \cdot)$, mit $\mathtt{s}(\mathsf{0}) = \mathsf{0}$.
   Ein Modell mit einem Bereich mit genau fünf Objekten ist der Körper $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit $\forall n\big(\mathtt{s}(n) \equiv n + 1 \mod 5\big)$.

2. Zum Beispiel:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\forall n\big(\mathtt{s}(n) = n + 1\big)$

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	1
2	2	3	4	1	2
3	3	4	1	2	3
4	4	1	2	3	4

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	2	4
3	0	3	2	1	4
4	0	4	4	4	4

$\forall n\big(\mathtt{s}(n) = n + 1\big)$

In den folgenden Aufgaben bezeichnen $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots$ Modelle und $B_1, B_2, \ldots$ die Bereiche dieser Modelle.

14. Finde zwei nicht-isomorphe Modelle $\mathbf{M}_1 \,\&\, \mathbf{M}_2$ mit $B_1 = B_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ für die Gruppenaxiome, wobei die Gruppenaxiome wie in Aufgabe 9.(a) in der Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}'} = \{\circ\}$ formuliert sind.

Lösung:

$\circ$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	γ	δ	α
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	α	β	δ

versus

$\circ$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

15. Sei $\mathscr{L} = \{\mathsf{c}, f\}$, wobei c ein Konstantensymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Weiter seien φ_1 und φ_2 die $\mathscr{L}$-Formeln

$$\underbrace{\forall x\big(x = \mathsf{c} \vee x = f(\mathsf{c})\big)}_{\varphi_1} \quad \textit{bzw.} \quad \underbrace{\exists x(x \neq \mathsf{c})}_{\varphi_2}.$$

Konstruiere zwei Modelle $\mathbf{M}_1$ & $\mathbf{M}_2$ so dass gilt: $\mathbf{M}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ und $\mathbf{M}_2 \models \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$.

Beispiel-Lösung:

Seien $B_1 := \{0,1\}$, $B_2 := \{0\}$ und gelte:

$$\mathsf{c}^{\mathbf{M}_1} = 0, \quad f^{\mathbf{M}_1}(0) = 1, \quad f^{\mathbf{M}_1}(1) = 0,$$

sowie:

$$\mathsf{c}^{\mathbf{M}_2} = 0, \quad f^{\mathbf{M}_2}(0) = 0.$$

16. Sei R ein 2-stelliges Relationssymbol. Weiter sei:

φ_1: $\forall x(xRx)$

φ_2: $\forall x\forall y(xRy \to yRx)$

φ_3: $\forall x\forall y\forall z\big((xRy \wedge yRz) \to xRz\big)$

Finde drei Modelle $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ mit möglichst kleinen Bereichen für die gilt:

$$\mathbf{M}_1 \models \neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \qquad \mathbf{M}_2 \models \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \varphi_3 \qquad \mathbf{M}_3 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3$$

Lösung:

Seien $B_1 := \{a\}$, $B_2 := \{a,b\}$, $B_3 := \{a,b,c\}$ und gelte:

$$R^{\mathbf{M}_1} = \varnothing, \qquad R^{\mathbf{M}_2} = B_2^2 \setminus \{\langle b,a\rangle\}, \qquad R^{\mathbf{M}_3} = B_3^2 \setminus \{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$$

17. Sei LO die Theorie der *linearen Ordnung*. Die Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{LO}}$ besteht aus der 2-stelligen Relation "$<$", und LO besteht aus den folgenden Axiomen:

LO_1 $\forall x \neg(x < x)$

LO_2 $\forall x\forall y\forall z\big((x < y \wedge y < z) \to x < z\big)$

LO_3 $\forall x\forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$

Die Theorie T sei nun wie folgt definiert: $\mathscr{L}_{\mathsf{T}} = \mathscr{L}_{\mathsf{LO}} \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei die c_n's Konstantensymbole sind, und $\mathsf{T} = \mathsf{LO} \cup \{c_n < c_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$.

Wir definieren vier Modelle $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$ von T mit den Bereichen B_1, B_2, B_3, B_4 wie folgt: $B_1 = B_3 = \mathbb{R}$, $B_2 = B_4 = (0,2)$ (offenes Intervall), wobei die 2-stellige Relation "$<$" in allen vier Modellen als die natürliche Ordnungrelation auf den reellen

Zahlen interpretiert wird. Weiter sei für alle $n \in \mathbb{N}$: $c_n^{\mathbf{M}_1} = n$, $c_n^{\mathbf{M}_2} = c_n^{\mathbf{M}_3} = 2 - \frac{1}{n+1}$, und $c_n^{\mathbf{M}_4} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Welche dieser vier Modelle sind zueinander isomorph?

Lösung:

Es gilt: $\mathbf{M}_1 \cong \mathbf{M}_2 \not\cong \mathbf{M}_3 \cong \mathbf{M}_4$.

Beweis:

$\mathbf{M}_1 \cong \mathbf{M}_2$: Die monoton wachsende Bijektion $f: \mathbb{R} \to (0,2)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) & x \leq 0 \\ 2 - \frac{1}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus.

$\mathbf{M}_3 \cong \mathbf{M}_4$: Die monoton wachsende Bijektion $f: \mathbb{R} \to (0,2)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(x-1)}{2} & x \leq 1 \\ \frac{1}{3-x} & 1 \leq x \leq 2 \\ 2 - \exp(2-x) & 2 \leq x \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus.

$\mathbf{M}_1 \not\cong \mathbf{M}_3$: Angenommen doch, dann gäbe es einen Ordnungsisomorphismus $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ f(n) = f(c_n^{\mathbf{M}_1}) = c_n^{\mathbf{M}_3} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2.$$

Somit kann f nicht surjektiv sein, insbesondere kein Isomorphismus, denn es gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x) \leq f(\max\{0, \lceil x \rceil\}) < 2,$$

im Widerspruch zu unserer Annahme.