8. Beweise formal die Transitivität der Gleichheitsrelation:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z \big((x = y \land y = z) \to x = z\big)$$

Lösung:

Wir zeigen zuerst $\{x = y \land y = z\} \vdash x = z$:

T $\ni$	$x = y \land y = z$
L_4	$(x = y \land y = z) \to y = z$
MP	$y = z$
L_5	$y = z \to (x = x \to (x = x \land y = z))$
MP	$x = x \to (x = x \land y = z)$
L_{14}	$x = x$
MP	$x = x \land y = z$
L_{15}	$(x = x \land y = z) \to (x = y \to x = z)$
MP	$x = y \to x = z$
L_3	$(x = y \land y = z) \to x = y$
MP	$x = y$
MP	$x = z$

Mit dem Deduktionstheorem folgt also

$$\vdash (x = y \land y = z) \to x = z.$$

Nach drei Anwendungen der Verallgemeinerungsregel haben wir schliesslich

$$\vdash \forall x \forall y \forall z \big((x = y \land y = z) \to x = z\big),$$

was zu beweisen war.

9. (a) Schreibe die Gruppenaxiome mit der Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{GT'}} = \{\circ\}$, wobei "$\circ$" ein binäres Funktionssymbol ist.

(b) Schreibe in der Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{GT'}}$ den folgenden Satz auf:

Es gibt ein x, so dass $x \circ x$ das Neutralelement ist.

Lösung:

(a) $\forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$
$\exists x \big(\forall x (e \circ x = x \wedge \exists y \colon y \circ x = e)\big)$

(b) $\exists x \forall y \big((x \circ x) \circ y = y\big)$

10. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Bedingung bezüglich der Verallgemeinerungsregel ($\forall$) im Deduktionstheorem (DT) notwendig ist. Um dies zu zeigen, wählen wir für T die Theorie PA, für ψ die Formel $\exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big)$, und für φ die Formel $\forall x\, \psi$.

(a) Zeige, dass gilt: $\mathsf{PA} \cup \{\psi\} \vdash \varphi$.

(b) Zeige, dass $\mathsf{PA} \vdash \psi \to \varphi$ nur dann gilt, wenn PA inkonsistent ist. Das heisst:

$$\mathrm{Con}(\mathsf{PA}) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\mathsf{PA} \cup \{\psi\} \vdash \varphi \quad \not\Rightarrow \quad \mathsf{PA} \vdash \psi \to \varphi\Big)$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrl}
\text{(a)} & \mathsf{T} \ni & \exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big) \\
 & (\forall) & \forall x \exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big) \\
\text{(b)} & \mathsf{Annahme} & \exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big) \to \forall x \exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big) \\
 & (\forall) & \forall x \Big(\exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big) \to \forall x \exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big)\Big) \\
 & \mathsf{L}_{10} + \mathsf{MP} & \exists y \big(\mathsf{s}(y) = \mathsf{s0}\big) \to \forall x \exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big) \\
 & \mathsf{L}_{14} & \mathsf{s0} = \mathsf{s0} \\
 & \mathsf{L}_{11} + \mathsf{MP} & \exists y \big(\mathsf{s}(y) = \mathsf{s0}\big) \\
 & \mathsf{MP} & \forall x \exists y \big(\mathsf{s}(y) = x\big) \\
 & \mathsf{L}_{10} + \mathsf{MP} & \exists y \big(\mathsf{s}(y) = \mathsf{0}\big) \\
 & \mathsf{PA}_0 & \neg \exists y \big(\mathsf{s}(y) = \mathsf{0}\big),
\end{array}$$

woraus sich ein Widerspruch ableiten lässt.

11. Sei T eine konsistente Menge von $\mathscr{L}$-Formeln und φ ein $\mathscr{L}$-Satz; dann gilt:

(a) φ ist konsistent mit T genau dann wenn $\mathsf{T} \nvdash \neg\varphi$.

(b) φ ist unabhängig von T genau dann wenn $\mathsf{T} \nvdash \varphi$ & $\mathsf{T} \nvdash \neg\varphi$.

Lösung:

(a) Wir zeigen beide Richtungen der Äquivalenz mittels Kontraposition.
Angenommen $\mathsf{T} \vdash \neg\varphi$. Dann lässt sich zeigen, dass gilt: $\mathsf{T} \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, also $\neg\,\mathrm{Con}(\mathsf{T} \cup \{\varphi\})$.
Gilt umgekehrt $\neg\,\mathrm{Con}(\mathsf{T} \cup \{\varphi\})$, können wir jede Aussage aus $\mathsf{T} \cup \{\varphi\}$ beweisen, zum Beispiel $\neg\varphi$. Da φ ein $\mathscr{L}$-Satz ist, folgt aus $\mathsf{T} \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, dass $\mathsf{T} \vdash \varphi \to \neg\varphi$. Damit können wir $\mathsf{T} \vdash \neg\varphi$ zeigen, zum Beispiel mithilfe von Aufgabe 12.

(b) Mithilfe von 11a und mit der Tautologie $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ können wir zeigen, dass $\mathsf{T} \nvdash \varphi$ & $\mathsf{T} \nvdash \neg\varphi$ äquivalent zu $\mathrm{Con}(\mathsf{T} \cup \{\neg\varphi\})$ & $\mathrm{Con}(\mathsf{T} \cup \{\varphi\})$ ist, was zu beweisen war.

12. Zeige, zum Beispiel mit L_0, L_1, L_8, L_9, (MP) und (DT), dass für beliebige logische Formeln φ und ψ gilt:

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big)$$

Lösung:

Betrachte $\mathsf{T} = \{\varphi \to \psi, \varphi \to \neg\psi, \varphi\}$ und den folgenden formalen Beweis:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{T} \ni & \varphi \\
\mathsf{T} \ni & \varphi \to \psi \\
\mathsf{MP} & \psi \\
\mathsf{T} \ni & \varphi \to \neg\psi \\
\mathsf{MP} & \neg\psi \\
\mathsf{L}_9 & \neg\psi \to (\psi \to \neg\varphi) \\
\mathsf{MP} & \psi \to \neg\varphi \\
\mathsf{MP} & \neg\varphi
\end{array}$$

Nach zweimaliger Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMs erhalten wir also

$$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big).$$

Mithilfe von L_1 und MODUS PONENS erhalten wir leicht

$$\{\neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big).$$

Schreibe $\chi :\equiv (\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big)$. Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM sehen wir also, dass $\varphi \to \chi$ und $\neg\varphi \to \chi$ Tautologien sind. Nun können wir zeigen:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_8 & (\varphi \to \chi) \to \Big((\neg\varphi \to \chi) \to \big((\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi\big)\Big) \\
\vdash & \varphi \to \chi
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
\mathsf{MP} & (\neg\varphi \to \chi) \to \big((\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi\big) \\
\vdash & \neg\varphi \to \chi \\
\mathsf{MP} & (\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi \\
\mathsf{L}_0 & \varphi \vee \neg\varphi \\
\mathsf{MP} & \chi,
\end{array}
$$

was zu beweisen war.