Die Gödel'schen Sätze

Serie 1

Definitionen & Formale Beweise

Musterlösung

---

3. Definiere in $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$ die folgenden Relationen und Funktionen:

(a) $x \leq y$ (x ist kleiner oder gleich y)

(b) $x < y$ (x ist echt kleiner als y)

(c) $x \mid y$ (x teilt y)

(d) $prim(x)$ (x ist eine Primzahl)

(e) $x//3$ (ganzzahlige Division x durch 3)

(f) $ggT(x, y)$ (grösster gemeinsamer Teiler von x & y)

Lösung:

(a) $\exists z(x + z = y)$

(b) $\exists z(x + \mathsf{s}(z) = y)$

(c) $\exists z(x \cdot z = y)$

(d) $x \neq 1 \land \forall y\big(y \mid x \to (y = 1 \lor y = x)\big)$

(e) $y = x//3 \leftrightarrow 3y \leq x \leq 3y + 2$

(f) $z = ggT(x, y) \leftrightarrow z \mid x \land z \mid y \land \forall w\big((w \mid x \land w \mid y) \to w \mid z\big)$

4. Prüfe, ob in den folgenden $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formeln die Substitution $x/z \cdot \mathsf{s}(x + y)$ erlaubt ist:

(a) $x = \mathsf{0} \lor \exists y\big((z < z) \to \forall x(y < x)\big)$

(b) $x = \mathsf{0} \lor \exists y\big((z < x) \to \forall x(y < x)\big)$

Lösung:

(a) Substitution ist erlaubt, da x in $x = \mathsf{0}$ im Wirkungsbereich keines Quantors ist.

(b) Substitution ist nicht erlaubt, da x in $z < x$ zwar frei, aber im Wirkungsbereich des Quantors $\exists y$ ist, während y auch in $z \cdot \mathsf{s}(x + y)$ vorkommt.

5. Zeige, dass für alle Formeln φ und ψ gilt:

(a) $\{\varphi\} \vdash \psi \to \varphi$

(b) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

Beweis:

(a) Es gilt $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi$, also mit dem Deduktionstheorem $\{\varphi\} \vdash \psi \to \varphi$. Alternativ können wir die passende Instanz des logischen Axioms L_1 und Modus Ponens anwenden.

(b)
$$\begin{array}{rl} \mathsf{T} \ni & \varphi \\ \mathsf{T} \ni & \psi \\ \mathsf{L}_5 & \psi \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi)) \\ \mathsf{MP} & \varphi \to (\varphi \wedge \psi) \\ \mathsf{MP} & \varphi \wedge \psi \end{array}$$

6. Zeige, dass für alle Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi, \psi$ gilt:

(a) $\{\varphi_1 \to \varphi_2, \varphi_2 \to \varphi_3\} \vdash \varphi_1 \to \varphi_3$

(b) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(c) $\vdash (\varphi \to \neg\psi) \leftrightarrow (\psi \to \neg\varphi)$

(d) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

(e) $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Beweis:

(a) Wir zeigen zuerst $\{\varphi_1, \varphi_1 \to \varphi_2, \varphi_2 \to \varphi_3\} \vdash \varphi_3$:
$$\begin{array}{rl} \mathsf{T} \ni & \varphi_1 \\ \mathsf{T} \ni & \varphi_1 \to \varphi_2 \\ \mathsf{MP} & \varphi_2 \\ \mathsf{T} \ni & \varphi_2 \to \varphi_3 \\ \mathsf{MP} & \varphi_3. \end{array}$$
Mit dem Deduktionstheorem folgt, was zu beweisen war.

In Aufgabe 12 zeigen wir das Schema $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$. Dieses werden wir für die nächsten Teilaufgaben verwenden.

(b) Wir zeigen wiederum zuerst $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$:

$\mathsf{T} \ni$	$\neg\psi$
L_1	$\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$
MP	$\varphi \to \neg\psi$
$\mathsf{T} \ni$	$\varphi \to \psi$
Schema	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$
MP	$(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$
MP	$\neg\varphi$

und wenden dann zweimal das DEDUKTIONSTHEOREM an.

(c) Analog zeigen wir $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$ sowie $(\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\psi)$ und wenden schliesslich L_5 und zweimal MODUS PONENS an.

(d) Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM zeigen wir, dass $\neg\varphi \to \neg\varphi$ eine Tautologie ist. Nun können wir $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$ zeigen:

$\mathsf{T} \ni$	φ
L_1	$\varphi \to (\neg\varphi \to \varphi)$
MP	$\neg\varphi \to \varphi$
Schema	$(\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi)$
MP	$(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$
Tautologie	$\neg\varphi \to \neg\varphi$
MP	$\neg\neg\varphi$

Nach einer weiteren Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS haben wir also $\varphi \to \neg\neg\varphi$.

(e)

Schema	$(\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi)$
Tautologie	$\varphi \to \varphi$
MP	$(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

7. Zeige, dass gilt:

$$\vdash \forall x \forall y (x = y \to y = x)$$

Beweis:

Wir zeigen zuerst:

$$\{x = y\} \vdash y = x$$

$\mathsf{T} \ni$	$x = y$
$\mathsf{T} \ni$	$x = x$

$$\begin{array}{rl} \mathsf{L}_5 & x = x \to (x = y \to (x = y \wedge x = x)) \\ \mathsf{MP} & x = y \to (x = y \wedge x = x) \\ \mathsf{MP} & x = y \wedge x = x \\ \mathsf{L}_{15} & (x = y \wedge x = x) \to (x = x \to y = x) \\ \mathsf{MP} & x = x \wedge y = x \\ \mathsf{MP} & y = x \end{array}$$

Also können wir mit dem Deduktionstheorem schliessen, dass auch

$$\vdash x = y \to y = x$$

gilt. Das Resultat folgt nun nach zweimaliger Anwendung der Verallgemeinerung.