Die Gödel'schen Sätze

Serie 9

endliche Modelle & Modelle von PA

Besprechung am 1. Dezember

36. Zeige: Hat eine Theorie erster Stufe nur endliche Modelle, so hat diese Theorie ein grösstes Modell.

37. Sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$ welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei $\mathbb{N}^\star$ das Ultraprodukt (*bzw.* die Ultrapotenz) bezüglich $\mathscr{U}$ der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}$. Schliesslich sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen im standard-Modell $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass es im Modell $\mathbb{N}^\star$ für jede Teilmenge $P \subseteq \mathbb{P}$ eine Zahl c_P gibt, so dass gilt:

$$p \mid c_P \quad \text{gdw.} \quad p \in P$$

(b) Zeige, dass der Bereich von $\mathbb{N}^\star$ die Kardinalität $2^{\aleph_0}$ hat, wobei $2^{\aleph_0} := |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ und $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

38. Beschreibe die Ordnungsstruktur des Modells aus Aufgabe 37.

Zeige dazu, dass zwischen zwei Zahlen aus dem Bereich von $\mathbb{N}^\star$ entweder endlich viele oder überabzählbar viele Zahlen liegen.

39. Zeige, dass das Modell aus Aufgabe 37 folgende Eigenschaft hat.

Ist $\langle a_n^\star : n \in \mathbb{N} \rangle$ eine Folge von Zahlen in $\mathbb{N}^\star$ (nicht notwendigerweise Zahlen aus $\mathbb{N}$), so gibt es in $\mathbb{N}^\star$ eine Zahl $c^\star$ für die gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}(c^\star > a_n^\star)$$