Die Gödel'schen Sätze

Serie 8

Teichmüller Prinzip, Ideale und Ultrafilter — Besprechung am 24. November

---

32. Eine Familie $\mathscr{F}$ von Mengen hat *endlichen Charakter*, falls gilt: Eine Menge X ist in $\mathscr{F}$ genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von X in $\mathscr{F}$ ist.

Das **Teichmüller Prinzip** besagt, dass jede nicht-leere Familie mit endlichem Charakter bezüglich Inklusion eine maximale Menge besitzt.

(a) Zeige mit dem Teichmüller Prinzip, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

(b) Zeige mit dem Teichmüller Prinzip, dass sich jeder Filter über S zu einem Ultrafilter über S erweitern lässt.

33. Sei S eine unendliche Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter welcher alle co-endlichen Teilmengen von S enthält.

Zeige, dass $\mathscr{U}$ keine endlichen Mengen enthält.

34. Sei S eine Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter.

(a) Zeige: Enthält $\mathscr{U}$ eine endliche Menge, so ist $\mathscr{U}$ ein Hauptultrafilter.

(b) Zeige, dass für alle Mengen $x, y \in \mathscr{P}(S)$ mit $y \subseteq x \in \mathscr{U}$ gilt:

$$\text{entweder} \quad y \in \mathscr{U} \quad \text{oder} \quad (x \setminus y) \in \mathscr{U}$$

35. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf $\mathscr{P}(S)$ definieren wir zwei binäre Operationen wie folgt:

$$x \cdot y := x \cap y \qquad \text{und} \qquad x + y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Welche Menge ist die 0, und welche Menge ist die 1 im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(c) Wie lassen sich Ideale im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ charakterisieren?

(d) Ein Ideal I in einem Ring R heisst *Primideal*, falls für alle $r, s \in R$ mit $r \cdot s \in I$ gilt $r \in I$ oder $s \in I$.
Wie sehen Primideale aus im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(e) Sei $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Primideal im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ mit $S \notin I$.
Zeige, dass $\mathscr{U} = \{x \subseteq S : (S \setminus x) \in I\}$ ein Ultrafilter über S ist.