

Die Gödel'schen Sätze

Serie 7

Vollständigkeit, Nichtstandard-Modelle von PA Besprechung am 17. November

28. Zeige mit Aufgabe 23.(b), dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen vollständig ist; d.h. für alle \mathcal{L}_{DLO} -Sätze σ gilt:

$$\text{entweder } \text{DLO} \vdash \sigma \quad \text{oder} \quad \text{DLO} \vdash \neg\sigma$$

29. Sei $\mathcal{L}_{\text{PA}^*} := \mathcal{L}_{\text{PA}} \cup \{c\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei φ_n der $\mathcal{L}_{\text{PA}^*}$ -Satz

$$\underbrace{s \dots s}_n 0 < c.$$

Weiter sei $\text{PA}^* := \text{PA} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- (a) Zeige, dass die $\mathcal{L}_{\text{PA}^*}$ -Theorie PA^* konsistent ist.
- (b) Da die Signatur $\mathcal{L}_{\text{PA}^*}$ abzählbar ist, hat PA^* ein abzählbares Modell \mathbb{N}^* .
Beschreibe die Ordnungsstruktur dieses Modells \mathbb{N}^* .
30. Seien $\mathcal{L}_{\text{PA}^*}$ und PA^* wie in Aufgabe 29. Zu PA^* fügen wir nun alle \mathcal{L}_{PA} -Sätze σ hinzu, für die gilt: $\mathbb{N} \models \sigma$. Die so erhaltene Theorie sei PA^{**} .
- (a) Zeige, dass die $\mathcal{L}_{\text{PA}^*}$ -Theorie PA^{**} konsistent ist.
- (b) Sei \mathbb{N}^{**} ein abzählbares Modell von PA^{**} .
Sind die Modelle \mathbb{N}^{**} und \mathbb{N} als Modelle von PA isomorph oder zumindest elementar äquivalent?
31. Zeige, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle von PA gibt, welche alle elementar äquivalent zu \mathbb{N} sind.