Die Gödel'schen Sätze

Serie 6

Logische Axiome & Kompaktheitssatz

Besprechung am 10. November

25. Sei $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ das Axiomenschema $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$. In Aufgabe 12 wurde $\{\mathsf{L}_0, \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_8, \mathsf{L}_9\} \vdash \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ gezeigt.
Zeige: $\{\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

26. Sei $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ wie oben.

(a) Zeige: $\{\mathsf{L}_1 - \mathsf{L}_9\} \nvdash \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$

(b) Zeige: $\{\mathsf{L}_1 - \mathsf{L}_9, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\} \nvdash \mathsf{L}_0$

(c) Zeige: $\{\mathsf{L}_1 - \mathsf{L}_9, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\} \nvdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (zur Erinnerung: $\{\mathsf{L}_0 - \mathsf{L}_9\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$)

Folgerung: Einerseits lässt sich $\neg\neg\varphi \to \varphi$ nicht ohne L_0 beweisen, selbst wenn wir $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ hinzunehmen; andererseits lässt sich $\varphi \to \neg\neg\varphi$ aus $\{\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\}$ beweisen, also ohne L_0.

27. Sei T das Axiomensystem der rationalen Zahlen. Wenn wir, wie dies üblich ist, das Modell einer Theorie mit dem Bereich des Modells identifizieren, so können wir schreiben $\mathbb{Q} \models \mathsf{T}$. Wir erweitern nun T zu T^* wie folgt: $\mathscr{L}_{\mathsf{T}^*} = \mathscr{L}_{\mathsf{T}} \cup \{\delta\}$, wobei δ ein Konstantensymbol ist, und es sei $\mathsf{T}^* = \mathsf{T} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei φ_n die Formel $0 < \delta \wedge \delta < \frac{1}{n}$ ist.

Aus dem Kompaktheitssatz folgt $\mathrm{Con}(\mathsf{T}) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathsf{T}^*)$, und mit dem Vollständigkeitssatz erhalten wir: Existiert ein Modell $\mathbb{Q}$ für die Theorie der rationalen Zahlen, so exisitert auch ein Modell $\mathbb{Q}^*$ für die erweiterte Theorie T^*.

(a) Gibt es einen $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$-Satz φ der in einer der beiden Theorien T oder T^* beweisbar ist, in der anderen aber nicht?

(b) Zeige, dass $\delta^{\mathbb{Q}^*}$ kleiner ist als jede positive rationale Zahl aus $\mathbb{Q}$.

(c) Entscheide, ob im Modell $\mathbb{Q}^*$ ein $x \in \mathbb{Q}$ existiert, so dass für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\big(|x - \delta^{\mathbb{Q}^*}| < |y - \delta^{\mathbb{Q}^*}|\big) \vee x = y$$

(d) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden einen sogenannten *archimedischen Körper*; das heisst, für jedes $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ existiert eine natürliche Zahl n, so dass gilt:

$$n \cdot |x| > 1$$

Ist $\mathbb{Q}^*$ ebenfalls ein archimedischer Körper?