Die Gödel'schen Sätze

Serie 5

formale Beweise und Modelle — Besprechung am 24. Oktober

---

22. Sei "e" ein Konstantensymbol und "$\circ$" ein binäres Funktionssymbol.

Zeige: $\big\{\forall x \forall y\big(y \circ x = \mathsf{e} \rightarrow x \circ y = \mathsf{e}\big),\ \forall x \exists y\big(y \circ x = \mathsf{e}\big)\big\} \vdash \forall x \exists y\big(x \circ y = \mathsf{e}\big)$

Hinweis: Zeige zuerst allgemein (*z.B.* mit einem Widerspruchsbeweis) dass gilt:

$$\big\{\forall y\big(\varphi(y) \rightarrow \psi(y)\big),\ \exists y\, \varphi(y)\big\} \vdash \exists y\, \psi(y)$$

23. DLO bezeichne die Theorie der *dichten linearen Ordnungen*: Die Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{DLO}}$ besteht aus der 2-stelligen Relation "$<$", und die nicht-logischen Axiome von DLO sind:

DLO_1 $\quad\forall x \neg(x < x)$

DLO_2 $\quad\forall x \forall y \forall z\,\big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\big)$

DLO_3 $\quad\forall x \forall y\,(x < y \vee x = y \vee y < x)$

DLO_4 $\quad\forall x \forall y \exists z\,\big(x < y \rightarrow (x < z \wedge z < y)\big)$

DLO_5 $\quad\forall x \exists y \exists z\,(y < x \wedge x < z)$

(a) Konstruiere ein Modell für DLO mit dem Bereich $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.

(b) Zeige, dass zwei abzählbare Modelle von DLO immer isomorph sind.

24. Zeige: Hat eine Theorie T beliebig grosse endliche Modelle, so hat T auch ein unendliches Modell.