Die Gödel'schen Sätze

Serie 4

Modelle & formale Beweise — Besprechung am 23. März

---

18. Beweise formal die folgende Tautologie:

$$\vdash \exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$$

Hinweise: Mit L_{10} (neue Nummerierung) haben wir $\forall x\neg\varphi \to \neg\varphi$. Ferner wurde in Aufgabe 6.(c) $\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$ gezeigt.

19. Die $\mathscr{L}$-Formeln φ_{11} und φ_{13} seien Instantiierungen der logischen Axiome L_{11} *bzw.* L_{13}. Weiter sei $\mathbf{M}$ ein Modell einer $\mathscr{L}$-Theorie.

Zeige, dass gilt:

$$\mathbf{M} \vDash \varphi_{11} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} \vDash \varphi_{13}$$

20. Sei $\mathscr{L}$ eine abzählbare Signatur und sei für jede konsistente Menge Φ von $\mathscr{L}$-Sätzen $\mathbf{M}_\Phi \vDash \Phi$ ein Modell (dieses existiert nach dem Vollständigkeitssatz). Ferner sei

$$\Sigma := \{\mathbf{M}_\Phi : \Phi \text{ ist Menge von } \mathscr{L}\text{-Sätzen und es gilt} \operatorname{Con}(\Phi)\}$$

und für jeden $\mathscr{L}$-Satz φ sei

$$X_\varphi := \{\mathbf{M} \in \Sigma : \mathbf{M} \vDash \varphi\}.$$

Definiere nun die offenen Mengen als die kleinsten Menge, welche alle X_φ enthält.

(a) Zeige, dass die Mengen X_φ eine Basis der Topologie bilden.

(b) Zeige, dass die Mengen X_φ abgeschlossen ist.

(c) Zeige mit dem Kompaktheitssatz, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält (d.h. der topologische Raum Σ ist kompakt).

21. Sei $\mathscr{L} = \{\mathsf{e}, \circ\}$ die Sprache der Gruppentheorie. Die $\mathscr{L}$-Theorie T bestehe aus folgenden drei $\mathscr{L}$-Sätzen:

- $\forall x\forall y\forall z\big(x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z\big)$
- $\forall x\big(\mathsf{e}\circ x = x\big)$
- $\forall x\exists y\big(x\circ y = \mathsf{e}\big)$

Zeige: $\quad \mathsf{T} \nvdash \forall x\big(x\circ\mathsf{e} = x\big) \vee \forall x\exists y\big(y\circ x = \mathsf{e}\big)$