Die Gödel'schen Sätze

Serie 3

Modelle

Besprechung am 19. Oktober

13. Konstruiere für jede der folgenden beiden Theorien zwei Modelle: jeweils ein Modell mit einem möglichst kleinen Bereich und jeweils ein Modell mit einem Bereich welcher genau fünf Objekte besitzt.

(a) $\mathsf{PA} \setminus \{\mathsf{PA}_0\}$

(b) $\mathsf{PA} \setminus \{\mathsf{PA}_1\}$

In den folgenden Aufgaben bezeichnen $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots$ Modelle und $B_1, B_2, \ldots$ die Bereiche dieser Modelle.

14. Finde zwei nicht-isomorphe Modelle $\mathbf{M}_1 \,\&\, \mathbf{M}_2$ mit $B_1 = B_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ für die Gruppenaxiome, wobei die Gruppenaxiome wie in Aufgabe 9.(a) in der Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}'} = \{\circ\}$ formuliert sind.

15. Sei $\mathscr{L} = \{\mathsf{c}, f\}$, wobei c ein Konstantensymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Weiter seien φ_1 und φ_2 die $\mathscr{L}$-Formeln

$$\underbrace{\forall x\big(x = \mathsf{c} \vee x = f(\mathsf{c})\big)}_{\varphi_1} \quad \textit{bzw.} \quad \underbrace{\exists x(x \neq \mathsf{c})}_{\varphi_2}.$$

Konstruiere zwei Modelle $\mathbf{M}_1 \,\&\, \mathbf{M}_2$ so dass gilt: $\mathbf{M}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ und $\mathbf{M}_2 \models \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$.

16. Sei R ein 2-stelliges Relationssymbol. Weiter sei:

φ_1: $\forall x(xRx)$

φ_2: $\forall x \forall y(xRy \to yRx)$

φ_3: $\forall x \forall y \forall z\big((xRy \wedge yRz) \to xRz\big)$

Finde drei Modelle $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ mit möglichst kleinen Bereichen für die gilt:

$$\mathbf{M}_1 \models \neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \qquad \mathbf{M}_2 \models \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \varphi_3 \qquad \mathbf{M}_3 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3$$

17. Sei LO die Theorie der *linearen Ordnung*. Die Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{LO}}$ besteht aus der 2-stelligen Relation "$<$", und LO besteht aus den folgenden Axiomen:

LO_1 $\forall x \neg(x < x)$

LO_2 $\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \to x < z\big)$

LO_3 $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

Die Theorie T sei nun wie folgt definiert: $\mathscr{L}_{\mathsf{T}} = \mathscr{L}_{\mathsf{LO}} \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei die c_n's Konstantensymbole sind, und $\mathsf{T} = \mathsf{LO} \cup \{c_n < c_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Wir definieren vier Modelle $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$ von T mit den Bereichen B_1, B_2, B_3, B_4 wie folgt: $B_1 = B_3 = \mathbb{R}$, $B_2 = B_4 = (0, 2)$ (offenes Intervall), wobei die 2-stellige Relation "$<$" in allen vier Modellen als die natürliche Ordnungrelation auf den reellen Zahlen interpretiert wird. Weiter sei für alle $n \in \mathbb{N}$: $c_n^{\mathbf{M}_1} = n$, $c_n^{\mathbf{M}_2} = c_n^{\mathbf{M}_3} = 2 - \frac{1}{n+1}$, und $c_n^{\mathbf{M}_4} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Welche dieser vier Modelle sind zueinander isomorph?