Die Gödel'schen Sätze

Serie 2

Konsistenz & Unabhängigkeit

Besprechung am 13. Oktober

8. Beweise formal die Transitivität der Gleichheitsrelation:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z \big((x = y \wedge y = z) \to x = z \big)$$

9. (a) Schreibe die Gruppenaxiome mit der Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{GT'}} = \{\circ\}$, wobei "$\circ$" ein binäres Funktionssymbol ist.

(b) Schreibe in der Sprache $\mathscr{L}_{\mathsf{GT'}}$ den folgenden Satz auf:

Es gibt ein x, so dass $x \circ x$ das Neutralelement ist.

10. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Bedingung bezüglich der Verallgemeinerungsregel ($\forall$) im Deduktionstheorem (DT) notwendig ist. Um dies zu zeigen, wählen wir für T die Theorie PA, für ψ die Formel $\exists y \big(\mathsf{s}(y) = x \big)$, und für φ die Formel $\forall x\, \psi$.

(a) Zeige, dass gilt: $\mathsf{PA} \cup \{\psi\} \vdash \varphi$.

(b) Zeige, dass $\mathsf{PA} \vdash \psi \to \varphi$ nur dann gilt, wenn PA inkonsistent ist. Das heisst:

$$\mathrm{Con}(\mathsf{PA}) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\mathsf{PA} \cup \{\psi\} \vdash \varphi \quad \not\Longrightarrow \quad \mathsf{PA} \vdash \psi \to \varphi \Big)$$

11. Sei T eine konsistente Menge von $\mathscr{L}$-Formeln und φ ein $\mathscr{L}$-Satz; dann gilt:

(a) φ ist konsistent mit T genau dann wenn $\mathsf{T} \nvdash \neg\varphi$.

(b) φ ist unabhängig von T genau dann wenn $\mathsf{T} \nvdash \varphi$ & $\mathsf{T} \nvdash \neg\varphi$.

12. Zeige, dass gilt

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$$

Tipp: Man kann L_0, L_1, L_8, L_9, (MP) und (DT) dafür verwenden.