Die Gödel'schen Sätze

Serie 12

Diverses

Besprechung am 22. Dezember

---

48. Gib die Anzahl Stellen einer Zahl c an, welche die Sequenz $\langle 2, 0, 2, 2 \rangle$ codiert.

49. Sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$, welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei $\mathbb{R}^\star$ das Ultraprodukt (*bzw.* die Ultrapotenz) bezüglich $\mathscr{U}$ der $\mathscr{L}_\mathbb{R}$-Struktur $\mathbb{R}$.

Zeige, dass in $\mathbb{R}^\star$ infinitesimale Zahlen existieren, dass heisst, Zahlen, die positiv, beliebig klein und von 0 verschieden sind. Existieren solche infintesimale Zahlen auch, wenn wir $\mathbb{R}$ überall durch $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{N}$ ersetzen?

50. Sei f eine reelle Funktion, welche an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist und sei δ eine positive infinitesimale Zahl. Für jedes von 0 verschiedene ε im Interval $[-\delta, \delta]$ sei

$$\Delta_f(x_0, \varepsilon) := \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$

Zeige, dass $f'(x_0) = a$, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall \varepsilon \in [-\delta, \delta] \Big(\mathrm{st}\big(\Delta_f(x_0, \varepsilon)\big) = a \Big)$.

Hinweis: Es ist empfehlenswert, im Buch die Seiten 216-220 zu lesen.