Die Gödel'schen Sätze

Serie 10

Definitionen

Besprechung am 14. Dezember

---

40. Zeige, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{coprime}(x,y) \leftrightarrow \big(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge \forall z < \mathrm{s}x(z \mid x \wedge z \mid y \to z = 1)\big)$$

41. Definiere die einstelligen Relationen $\mathrm{even}(x)$ und $\mathrm{odd}(x)$ formal und zeige, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathrm{even}(x) \vee \mathrm{odd}(x)\big)$$

42. Zeige, dass BÉZOUT'S LEMMA in PA beweisbar ist. Das heisst, zeige, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y\Big(\mathrm{coprime}(x,y) \leftrightarrow \big(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge \exists a \leq y \exists b \leq x(ax + 1 = by)\big)\Big).$$

Tipp: Zeige zuerst $\exists a \exists b(ax + 1 = by) \leftrightarrow \exists a' \exists b'(a'x = b'y + 1)$ (z.B. sei $a' := y - a$ und $b' := x - b$). Verwende anschliessend das DIVISION MIT REST PRINZIP und das KLEINSTE ZAHL PRINZIP.

43. Beweise PA_6 aus $\mathsf{PA}_0 - \mathsf{PA}_5$, LEMMA 8.4. und dem KLEINSTEN ZAHL PRINZIP.