

Die Gödel'schen Sätze

Serie 1

Definitionen & Formale Beweise

Besprechung am 5. Oktober

3. Definiere in \mathcal{L}_{PA} die folgenden Relationen und Funktionen:

- (a) $x \leq y$ (x ist kleiner oder gleich y)
- (b) $x < y$ (x ist echt kleiner als y)
- (c) $x \mid y$ (x teilt y)
- (d) $\text{prim}(x)$ (x ist eine Primzahl)
- (e) $x // 3$ (ganzzahlige Division x durch 3)
- (f) $\text{ggT}(x, y)$ (grösster gemeinsamer Teiler von x & y)

4. Prüfe, ob in den folgenden \mathcal{L}_{PA} -Formeln die Substitution $x/z \cdot \mathbf{s}(x + y)$ erlaubt ist:

- (a) $x = 0 \vee \exists y((z < z) \rightarrow \forall x(y < x))$
- (b) $x = 0 \vee \exists y((z < x) \rightarrow \forall x(y < x))$

5. Zeige, dass für alle Formeln φ und ψ gilt:

- (a) $\{\varphi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$
- (b) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

6. Zeige, dass für alle Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi, \psi$ gilt:

- (a) $\{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2, \varphi_2 \rightarrow \varphi_3\} \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_3$
- (b) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- (c) $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- (d) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
- (e) $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$

7. Zeige, dass gilt:

$$\vdash \forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$