Das Auswahlaxiom

Serie 7

Ultrafilter und Ideale

Abgabe am 19. April

19. Sei S eine unendliche Menge und sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter welcher alle co-endlichen Teilmengen von S enthält.

(a) Zeige, dass $\mathscr{U}$ keine endlichen Mengen enthält.

(b) Sei P eine Partition von S in n Teile wobei $n \in \mathbb{N}$.
Zeige, dass gilt: $|\mathscr{U} \cap P| = 1$

20. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf $\mathscr{P}(S)$ definieren wir zwei binäre Operationen wie folgt:

$$x \cdot y := x \cap y \qquad \text{und} \qquad x + y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Welche Menge ist die 0, und welche Menge ist die 1 im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$?

(c) Wie lassen sich Ideale im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ charakterisieren?

(d) Ein Ideal I in einem Ring R heisst *Primideal*, falls für alle $r, s \in R$ mit $r \cdot s \in I$ gilt: $r \in I$ oder $s \in I$.
Wie lassen sich Primideale im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ charakterisieren?

(e) Sei $I \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Primideal im Ring $\big(\mathscr{P}(S), +, \cdot\big)$ mit $S \notin I$.
Zeige, dass $\mathscr{U} = \{x \subseteq S : (S \setminus x) \in I\}$ ein Ultrafilter über S ist.

21. PRIMIDEALTHEOREM FÜR MENGENALGEBREN. *Ist S eine nicht-leere Menge und ist $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ideal über S, so lässt sich $\mathscr{I}$ zu einem Primideal erweitern.*

Beweise das PRIMIDEALTHEOREM FÜR MENGENALGEBREN aus dem Auswahlaxiom, *bzw.* einer äquivalenten Form des Auswahlaxioms.