Das Auswahlaxiom

Serie 6

Kardinalitäten

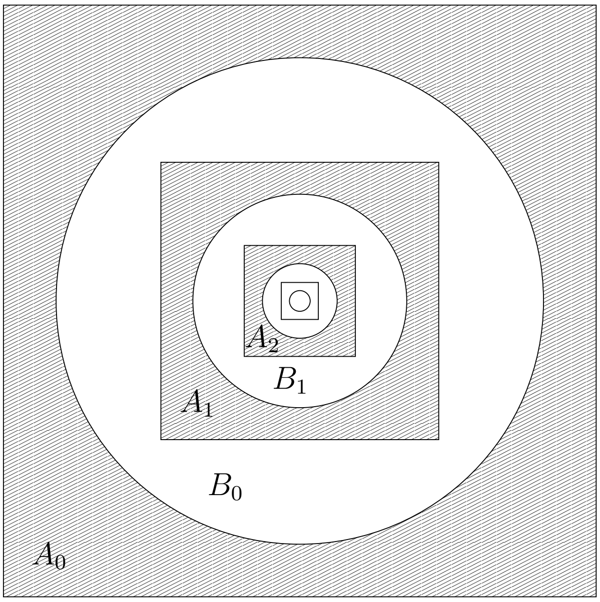
Abgabe am 12. April

---

15. Im Folgenden wird Bernsteins Beweis des CANTOR-BERNSTEIN THEOREMs gegeben:

Seien A und B Mengen und seien $f : A \hookrightarrow B$ und $g : B \hookrightarrow A$ zwei Injektionen. Ferner sei $A_0 := A$, $B_0 := g[B]$, und für $n \in \omega$ sei $A_{n+1} := (g \circ f)[A_n]$ und $B_{n+1} := (g \circ f)[B_n]$. Schliesslich definieren wir $D := \bigcap_{n \in \omega} A_n$.

Wir erhalten also folgendes Bild:



(a) Zeige, dass gilt $A_0 = D \cup (A_0 \setminus B_0) \cup (B_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup \ldots$

(b) Zeige, dass gilt $B_0 = D \cup (B_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup \ldots$

(c) Zeige, dass für alle $n \in \omega$ gilt: $|A_n \setminus B_n| = |A_{n+1} \setminus B_{n+1}|$.

(d) Folgere aus (c) durch Umgruppierung der Darstellung von B_0 aus (b), dass gilt: $|A_0| = |B_0|$.

16. Zeige: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}| = |[0,1]| = |\mathbb{C}|$

17. Für Mengen A und B schreiben wir $|A| \leq^* |B|$ falls eine Surjektion $f : B \twoheadrightarrow A$ existiert.

Zeige: $|A| \leq^* |B| \rightarrow |\mathscr{P}(A)| \leq |\mathscr{P}(B)|$.

18. Bestimme (in ZF) die folgenden Mengen:

$$|\omega|\,, \quad |\omega + 23|\,, \quad |17|\,, \quad |16|\,, \quad |\mathfrak{c}|\,, \quad |\omega_1|$$