Das Auswahlaxiom

Serie 4

Anwendungen des Auswahlaxioms

Abgabe am 22. März

---

7. Konstruiere eine Färbung $\pi : [\omega]^\omega \to \{0,1\}$ der Menge der unendlichen Teilmengen von ω mit den zwei Farben 0 und 1, so dass für jede Menge $H \in [\omega]^\omega$ gilt:

$$\pi\big[[H]^\omega\big] = \{0,1\}$$

Das heisst, für jede unendliche Menge $H \subseteq \omega$ existieren zwei unendliche Teilmengen $X, Y \subseteq H$ mit $\pi(X) = 0$ und $\pi(Y) = 1$.

8. Konstruiere eine Menge $X \subseteq [0,1]$ des Einheitsintervalls, welche nicht Lebesgue messbar ist.

Bemerkung: Das Lebesgue'sche Mass ist σ-additiv und translationsinvariant.

9. Konstruiere eine Menge $Y \subseteq [0,1]$ des Einheitsintervalls, welche nicht die Baire-Eigenschaft hat.

Bemerkung: Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ hat die Baire-Eigenschaft, falls eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so dass die symmetrische Differenz $X \Delta O$ mager ist, wobei eine Menge mager ist, falls sie die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist, und eine nirgends dichte Menge eine Menge ist, deren Komplement eine offen dichte Menge enthält.