Das Auswahlaxiom

Serie 1

äquivalente Formen von AC

Abgabe am 1. März

---

1. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind zum AUSWAHLAXIOM

(a) Zu jeder Äquivalenzrelation existiert ein Repräsentantensystem.

(b) Existiert eine Surjektion $f : A \twoheadrightarrow B$ von der Menge A auf die Menge B, so existiert eine Injektion $g : B \hookrightarrow A$, so dass die Verknüpfung $f \circ g$ die identische Abbildung auf B ist.

Eine Familie $\mathscr{F}$ von Mengen hat *endlichen Charakter*, falls für jede Menge x gilt:

$$x \in \mathscr{F} \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{jede endliche Teilmenge von } x \textit{ ist Element von } \mathscr{F}$$

TEICHMÜLLERPRINZIP. Sei $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen. Hat $\mathscr{F}$ endlichen Charakter, dann hat $\mathscr{F}$ ein, bezüglich Inklusion $\subseteq$, maximales Element.

Bemerkung: Das TEICHMÜLLERPRINZIP ist äquivalent zum AUSWAHLAXIOM.

2. (a) Zeige, dass aus dem TEICHMÜLLERPRINZIP das AUSWAHLAXIOM folgt.

(b) Beweise mit Hilfe des TEICHMÜLLERPRINZIPs, dass jeder Vektorraum eine algebraische Basis besitzt.