Elliptische Kurven und Kryptographie

Serie 3

Schnittpunkte von Kurven vom Grad ≤ 3 — Besprechung am 17. Oktober

---

9. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden Punkt P der reellen projektiven Ebene existieren zwei Geraden G_1 und G_2 durch P, sodass jede Gerade G durch P in der Form

$$\alpha G_1 + \beta G_2 = 0 \qquad (\text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

geschrieben werden kann.

10. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Sind $P_1, \ldots, P_4$ vier verschiedene Punkte der reellen projektiven Ebene, sodass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, so existieren zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 durch $P_1, \ldots, P_4$, sodass jeder Kegelschnitt K durch $P_1, \ldots, P_4$ in der Form

$$\alpha K_1 + \beta K_2 = 0 \qquad (\text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

geschrieben werden kann.

(b) Ist P_0 ein Punkt, der verschieden ist von $P_1, \ldots, P_4$, so existiert genau ein Kegelschnitt durch $P_0, \ldots, P_4$.

(c) Seien $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, 1, 1)$, $P_3 = (-1, -1, 1)$, $P_4 = (1, -1, 1)$.
Finde jeweils einen Kegelschnitt durch $P_1, \ldots, P_4$ sowie durch:
(i) $P_0 = (0, 2, 1)$ (ii) $P_0 = (1, 2, 1)$ (iii) $P_0 = (0, 0, 1)$ (iv) $P_0 = (1, 0, 0)$

11. Beweise den folgenden Satz von Chasles (1837):

Einer cubischen Kurve C sei ein Sechseck mit den Punkten $P_1, \ldots, P_6$ und den Seiten $S_1 = \overline{P_1P_2}$, $S_2 = \overline{P_2P_3}$, $S_3 = \overline{P_3P_4}$, $S_4 = \overline{P_4P_5}$, $S_5 = \overline{P_5P_6}$, $S_6 = \overline{P_6P_1}$ einbeschrieben.

Liegen dann die Schnittpunkte $S_1 \wedge S_4$ und $S_2 \wedge S_5$ auf C, so liegt auch $S_3 \wedge S_6$ auf C.

12. Beweise den folgenden Satz von Pascal (1640):

Einem Kegelschnitt sei ein Sechseck mit den Punkten $P_1, \ldots, P_6$ und den Seiten $S_1 = \overline{P_1P_2}$, $S_2 = \overline{P_2P_3}$, $S_3 = \overline{P_3P_4}$, $S_4 = \overline{P_4P_5}$, $S_5 = \overline{P_5P_6}$, $S_6 = \overline{P_6P_1}$ einbeschrieben.

Dann liegen die drei Schnittpunkte $S_1 \wedge S_4$, $S_2 \wedge S_5$, $S_3 \wedge S_6$ auf einer Geraden.

Hinweis: Ist K ein Kegelschnitt und G eine Gerade, dann ist $K \cdot G = 0$ eine cubische Kurve.