# Algebra I

## Musterlösung 7

Gruppenoperationen und zwei Ringe

---

**43.** Sei $G$ eine Gruppe und $H$ eine Untergruppe.

(a) Zeige, dass die Abbildung $G \times G/H \to G/H$, $(g, g'H) \mapsto gg'H$ eine Gruppenoperation definiert.

(b) Zeige, dass diese Operation transitiv ist. Das bedeutet, dass die Operation nur eine Bahn besitzt.

(c) Bestimme ihre Stabilisatoren.

(d) Zeige, dass $S_7$ keine Untergruppe vom Index 6 hat.

*Lösung:* (a) Wir müssen zwei Bedingungen nachprüfen, nämlich

- für alle $g, h, g' \in G$ gilt $(gh)g'H = g(hg'H)$ und
- für alle $g' \in G$ gilt $eg'H = g'H$.

Beide sind wegen der Assoziativität der Multiplikation in $G$ offensichtlich erfüllt.

(b) Seien $g', g'' \in H$. Dann liegen wegen $(g''g'^{-1})g'H = g''H$ die Nebenklassen $g'H$ und $g''H$ in derselben Bahn. Somit gibt es nur eine Bahn und die Operation ist transitiv.

(c) Sei $g' \in G$. Dann ist $\mathrm{St}_G(g'H) = \{g \in G : gg'H = g'H\} = \{g \in G : g'^{-1}gg' \in H\}$.

(d) Sei $H \leq S_7$ eine Untergruppe vom Index 6 und betrachte die oben definierte Gruppenoperation $S_7 \times S_7/H \to S_7/H$. Wegen $|S_7/H| = 6$ gibt uns das einen Homomorphismus $\varphi\colon S_7 \to S(S_7/H) \cong S_6$. Die einzigen normalen Untergruppen von $S_7$ und somit die einzigen Möglichkeiten für $\ker(\varphi)$ sind $\{e\}, A_7$ und $S_7$. Nach dem Homomorphiesatz gilt $S_7/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$. Da die Operation transitiv ist, muss das Bild von $\varphi$ mindestens 6 Elemente haben. Daher gilt auch $[S_7 : \ker(\varphi)] \geq 6$. Somit muss $\ker(\varphi) = \{e\}$ sein. Dann ist $\varphi$ aber injektiv und wegen $|S_7| > |S_6|$ ist das nicht möglich.

**44.** Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^*$ der reellen Zahlen operiere auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$g \circ (a, b) = \left(ga, \frac{b}{g}\right),$$

wobei $g \in \mathbb{R}^*$ und $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

*Lösung:* Die Bahn eines Elements $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge

$$\mathbb{R}^*(a,\, b) = \{(ta,\, b/t) \,:\, t \in \mathbb{R}^*\}.$$

Es gibt damit folgende Bahnen:

- $a, b \neq 0$: Hyperbeln $xy = ab$, denn jeder Punkt einer solchen Hyperbel erfüllt $x = ta,\ y = b/t$ mit $t = b/y = x/a \neq 0$.
- $a = 0,\ b \neq 0$: $y$-Achse ohne Ursprung.
- $b = 0,\ a \neq 0$: $x$-Achse ohne Ursprung.
- $(a, b) = (0, 0)$: Ursprung.

Der Stabilisator von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller $t \in \mathbb{R}^*$ mit $ta = a,\ b/t = b$. Diese ist $\{1\}$ für $(a, b) \neq (0, 0)$ und $\mathbb{R}^*$ für $(a, b) = (0, 0)$.

**45.** Sei $G \times M \to M$ eine Operation einer Gruppe $G$ auf einer Menge $M$ und sei $f$ eine Auswahlfunktion der Menge der Bahnen $M/G$, **d.h.** $f\colon M/G \to M$ und für jedes $N \in M/G$ ist $f(N) \in N$.

Zeige, dass gilt

$$|M| = \sum_{N \in M/G} \big[G : \mathrm{St}_G\big(f(N)\big)\big]\,.$$

*Lösung:* Aus der Vorlesung wissen wir, dass für jedes $x \in X$ gilt $[G : \mathrm{St}_G(x)] = |Gx|$. Ausserdem gilt mit $N = Gf(N)$ auch

$$M = \dot{\bigcup}_{N \in M/G} N = \dot{\bigcup}_{N \in M/G} Gf(N).$$

Zusammengefasst heisst das

$$|M| = \Big|\dot{\bigcup}_{N \in M/G} N\Big| = \sum_{N \in M/G} \big[G : \mathrm{St}_G\big(f(N)\big)\big].$$

**46.** Finde eine Menge $M$ und eine Gruppenoperation der Dodekaedergruppe $D$ auf $M$, sodass die Sylow 2-Untergruppen von $D$ genau die Stabilisatoren sind, d.h.

$$\mathrm{Syl}_2(G) = \{\mathrm{St}_G(x) : x \in M\}.$$

*Lösung:* Bezeichne das Dodekaeder mit $X$ und sei $d(X)$ die Menge aller Diagonalen durch Seitenmittelpunkte. Sei $M := d(X) \times d(X) \times d(X)$. Es ist $|M| = 15$. In Worten ausgedrückt besteht $M$ aus allen geordneten Diagonalentripeln, deren drei Elemente paarweise senkrecht aufeinander stehen. Nun folgt die Aussage mit der Lösung von Aufgabe 34(c).

**47.** Sei $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto g \circ x$ eine Operation einer Gruppe $G$ auf einer Menge $M$ und sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccll} G \times \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{F}(M) & \\ (g\,,\,f) & \mapsto & g * f & \text{mit } (g * f)(x) := f(g^{-1} \circ x) \end{array}$$

eine Gruppenoperation ist und bestimme ihre Fixpunkte.

*Lösung:* Wir müssen zei Bedingungen nachprüfen, nämlich

- für alle $g, h \in G$ und alle $f \in \mathcal{F}(M)$ gilt $(g * (h * f))(x) = ((gh) * f)(x)$ und

- für alle $f \in \mathcal{F}(M)$ gilt $(g * f)(x) = x$.

Die zweite Bedingung ist offensichtlich. Für die erste rechnen wir

$$(g * (h * f))(x) = (h * f)(g^{-1} \circ x) = f(h^{-1}(g^{-1} \circ x)) = f((gh)^{-1} \circ x) = ((gh) * f)(x).$$

Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ ist genau dann ein Fixpunkt für die Operation, wenn für jedes $x \in M$ und $g \in G$ gilt $f(x) = f(g^{-1} \circ x)$. Das ist genau dann der Fall, wenn $f$ konstant auf den Bahnen der Operation $\circ$ ist, also wenn $f$ Elemente derselben Bahn auf dieselbe reelle Zahl abbildet.

**48.** Sei $(G, +)$ eine additive abelsche Gruppe und sei $\mathrm{End}(G)$ die Menge der Endomorphismen von $G$.

Zeige, dass $\big(\mathrm{End}(G), +, \circ\big)$ mit $(f_1 + f_2)(g) := f_1(g) + f_2(g)$ und $(f_1 \circ f_2)(g) := f_1\big(f_2(g)\big)$ zu einem Ring wird.

*Lösung:* Offensichtlich sind $+$ und $\circ$ wohldefiniert und assoziativ. Auch Kommutativität der Addition folgt offensichtlich daraus, dass $(G, +)$ abelsch ist. Das neutrale Element der Addition ist die Abbildung, die jedes Element aus $G$ auf $0 \in G$ schickt. Für ein $f \in \mathrm{End}(G)$ gilt klarerweise $(-f)(g) = -f(g)$. Das neutrale Element der Multiplikation ist die Identität. Um Distribuitivität nachzuprüfen, seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{End}(G)$ und sei $g \in G$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f_1 \circ (f_2 + f_3))(g) &= f_1((f_2 + f_3)(g)) = f_1(f_2(g) + f_3(g)) \overset{f_1 \in \mathrm{End}(G)}{=} f_1(f_2(g)) + f_1(f_3(g)) \\ &= (f_1 \circ f_2)(g) + (f_1 \circ f_3)(g) = (f_1 \circ f_2 + f_1 \circ f_3)(g)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}((f_1 + f_2) \circ f_3)(g) &= (f_1 + f_2)(f_3(g)) = f_1(f_3(g)) + f_2(f_3(g)) \\ &= (f_1 \circ f_3)(g) + (f_2 \circ f_3)(g) = (f_1 \circ f_3 + f_2 \circ f_3)(g).\end{aligned}$$

Somit haben wir alle Ringaxiome nachgeprüft.

**49.** Sei $S$ eine nicht leere Menge. Auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(S)$ (*d.h.* der Menge aller Teilmengen von $S$) definieren wir zwei binäre Operationen $\oplus$ und $*$ wie folgt:

$$X * Y := X \cap Y$$

und

$$X \oplus Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S), \emptyset, S, \oplus, *\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Zeige, dass eine nicht leere Menge $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(S)$ genau dann ein Ideal ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für $X, Y \in \mathfrak{a}$ ist $X \cup Y \in \mathfrak{a}$,

(ii) ist $X \in \mathfrak{a}$, so ist $\mathscr{P}(X) \subseteq \mathfrak{a}$.

*Lösung:* (a) Offensichtlich sind $\oplus$ und $*$ wohldefiniert.

Wir prüfen nun nach, dass $(\mathscr{P}(S), \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. kommutativität von $\oplus$ ist offensichtlich. Für die Assoziativität, seien $X, Y, Z \subseteq S$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
X \oplus (Y \oplus Z) &= (X \setminus ((Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y))) \cup (((Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)) \setminus X) \\
&= (X \setminus (Y \cup Z)) \cup (Y \setminus (Z \cup X)) \cup (Z \setminus (X \cup Y)) \cup (Z \cup X)) \cup (X \cap Y \cap Z) \\
&= (((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)) \setminus Z) \cup (Z \setminus ((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X))) \\
&= (X \oplus Y) \oplus Z.
\end{aligned}$$

Weiter ist $\emptyset$ das neutrale Element und jedes $X \subseteq S$ offensichtlich sein eigenes Inverses.

As nächstes zeigen wir, dass $(\mathscr{P}(X), *)$ ein kommutatives Monoid mit $1$ ist. Offensichtlich ist $*$ kommutativ. Assoziativität von $*$ ist bekannt. Das neutrale Element von $*$ ist offensichtlich $X$.

Für die Distribuitivität seien $X, Y, Z \subseteq X$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
X * (Y \oplus Z) &= X \cap ((Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)) = (X \cap (Y \setminus Z)) \cup (X \cap (Z \setminus Y)) \\
&= ((X \cap Y) \setminus Z) \cup ((X \cap Z) \setminus Y) \\
&= ((X \cap Y) \setminus (X \cap Z)) \cup ((X \cap Z) \setminus (X \cap Y)) \\
&= X * Y \oplus X * Z.
\end{aligned}$$

Wegen Kommutativität von $*$ folgt damit auch sofort $(X \oplus Z) * Z = X * Z \oplus Y * Z$.

(b) Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ideal. Sei $X \in \mathfrak{a}$. Sei $X' \subset X$. Dann ist $X' = X' \cup X = X' * X$ und daher folgt $X' \in \mathfrak{a}$. Somit haben wir (ii) bewiesen. Seien nun $X, Y \in \mathfrak{a}$. Wegen (ii) ist dann $X \setminus Y \in \mathfrak{a}$. Es gilt somit $X \cup Y = (X \setminus Y) \oplus Y \in \mathfrak{a}$. Somit ist (i) erfüllt.

Sei nun ein $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(X)$ gegeben, das (i) und (ii) erfüllt. Seien $X, Y \in \mathfrak{a}$. Dann liegen wegen (ii) die Mengen $X \setminus Y$ und $Y \setminus X$ in $\mathfrak{a}$ und mit (i) folgt

$$X \oplus (-Y) = X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \in \mathfrak{a}.$$

Da $\mathfrak{a}$ zudem nicht leer ist, ist es somit eine additive Untergruppe von $\mathscr{P}(X)$. Seien nun $X \subseteq S$ und $Y \in \mathfrak{a}$. Dann ist $X * Y = X \cap Y \subset Y$ und wegen (i) ist das ebenfalls ein Element von $\mathfrak{a}$. Somit ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal.