Algebra I

Musterlösung 4

Endlich erzeugte abelsche Gruppen

---

25. Seien $m \leqslant n$ positive natürliche Zahlen und sei $G = C_m \times C_n$. Zeige: Dann existieren $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant m$ und $k|l$, für die $G \cong C_k \times C_l$ ist.

Lösung: Seien $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen und $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ positive natürliche Zahlen mit $m = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$. Seien genauso $q_1, \ldots, p_s$ paarweise verschiedene Primzahlen und $\beta_1, \ldots, \beta_s$ natürliche Zahlen mit $n = \prod_{j=1}^s q_j^{\beta_j}$. Wiederholtes Anwenden von Aufgabe 7. ergibt $C_m \cong \prod_{i=1}^r C_{p_i^{\alpha_i}}$ und $C_n \cong \prod_{j=1}^s C_{q_i^{\beta_j}}$. Insgesamt folgt

$$C_m \times C_n \cong \left(\prod_{i=1}^r C_{p_i^{\alpha_i}} \right) \times \left(\prod_{j=1}^s C_{q_j^{\beta_j}} \right).$$

Falls $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ paarweise verschieden sind, das heisst, falls m und n teilerfremd sind, gilt $k = 1$ und $l = mn$. Ansonsten seien nach Umnummerierung $p_1 = q_1, \ldots, p_t = q_t$ für ein $1 \leqslant t \leqslant \min\{r, s\}$, so dass $p_{t+1}, \ldots, p_r, q_{t+1}, \ldots, q_s$ paarweise verschieden sind. Mit Umsortierung der Faktoren gilt nun

$$C_m \times C_n \cong \left(\prod_{i=1}^t C_{p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}} \right) \times \left(\prod_{j=1}^t C_{p^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}}} \right) \times \left(\prod_{i=t+1}^r C_{p_i^{\alpha_i}} \right) \times \left(\prod_{j=t+1}^s C_{q_j^{\beta_j}} \right).$$

Somit gilt $C_m \times C_n \cong C_k \times C_l$ mit

$$k = \prod_{i=1}^t p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}$$

und

$$l = \left(\prod_{i=1}^t p_i^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}} \right) \times \left(\prod_{i=t+1}^r p_i^{\alpha_i} \right) \times \left(\prod_{j=t+1}^s q_j^{\beta_j} \right).$$

26. Sei $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$. Bestimme $[G : nG]$ für alle $2 \leqslant n \leqslant 7$.

Lösung: Wir beweisen zuerst, dass für alle abelschen Gruppen G und H gilt, dass

$$2(G \times H) = 2G \times 2H$$

und

$$[G \times H : 2G \times 2H] = [G : 2G] \cdot [H : 2H]$$

ist. Seien $g \in G$ und $h \in H$ beliebig. Dann ist $2(g, h) = (2g, 2h)$. Daraus folgt die Inklusion $2(G \times H) \subseteq 2G \times 2H$. Seien nun $g \in 2G$ und $h \in 2H$. Dann existieren $g' \in G$ und $h' \in H$ mit $g = 2g'$ und $h = 2h'$. Für diese gilt $(g, h) = 2(g', h')$. Deshalb folgt $2(G \times H) \supseteq 2G \times 2H$. Nach dem zweiten Isomorphiesatz mit $K = G \times \{e\}$ und $N = 2G \times H$ sind $G \times H/2G \times H$

und $G/2G$ isomorph. Analog können wir $2G \times H/2G \times 2H \cong H/2H$ zeigen. Nach der Multiplikativität des Indexes gilt

$$[G \times H : 2G \times 2H] = [G \times H : 2G \times H] \times [2G \times H : 2G \times 2H] \quad = [G : 2G] \cdot [H : 2H].$$

Seien nun $m, n \geqslant 1$ eine natürliche Zahlen. Dann ist $n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \leqslant \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ eine Untergruppe einer zyklischen Gruppe und somit zyklisch. Mit Aufgabe 6a sehen wir, dass die maximale Ordnung eines Elements dies Gruppe gleich $\frac{\mathrm{kgV}(m,n)}{n}$ ist. Somit gilt $|n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = \frac{\mathrm{kgV}(m,n)}{n}\mathbb{Z}$ und daher $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \frac{mn}{\mathrm{kgV}(m,n)} = \mathrm{ggT}(m,n)$.

Beachte ausserdem, dass $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$ ist.

Wir setzen nun $n = 2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(2,2) = 2 \\
[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(4,2) = 2 \\
[\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(12,2) = 2 \\
[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(60,2) = 2.
\end{aligned}$$

Somit ist $[G : nG] = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Genauso ist mit $n = 3$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(2,3) = 1 \\
[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(4,3) = 1 \\
[\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(12,3) = 3 \\
[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(60,3) = 3.
\end{aligned}$$

Somit ist $[G : nG] = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 162$.

Genauso ist mit $n = 4$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(2,4) = 2 \\
[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(4,4) = 4 \\
[\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(12,4) = 4 \\
[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(60,4) = 4.
\end{aligned}$$

Somit ist $[G : nG] = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 2048$.

Genauso ist mit $n = 5$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(2,5) = 1 \\
[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(4,5) = 1 \\
[\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(12,5) = 1 \\
[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(60,5) = 5.
\end{aligned}$$

Somit ist $[G : nG] = 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 125$.

Genauso ist mit $n = 6$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(2,6) = 2 \\
[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(4,6) = 2 \\
[\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(12,6) = 6 \\
[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(60,6) = 6.
\end{aligned}$$

Somit ist $[G : nG] = 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 5184$.

Genauso ist mit $n = 7$

$$\begin{aligned}[]
[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(2,7) = 1 \\
[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(4,7) = 1 \\
[\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(12,7) = 1 \\
[\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})] &= \mathrm{ggT}(60,7) = 1.
\end{aligned}$$

Somit ist $[G : nG] = 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 49$.

27. (a) Sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

(b) Finde Homomorphismen $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \colon \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$, sodass die Gruppen $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/\ker(\psi_i)$ für $i = 1, 2, 3$ paarweise nicht isomorph sind.

Lösung: (a) Sei $\varphi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Homorphismus. Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(1) = k + n\mathbb{Z}$. Dann gilt jetzt für jedes $g \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Gleichung $\varphi(g) = kg$. Umgekehrt ist auch für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $g \mapsto kg$ ein wohldefinierter Homomorphismus. Da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ endlich ist, ist dieser genau dann bijektiv, wenn er surjektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\langle\varphi(1)\rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt, also genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(k, n) = 1$ gilt. Deshalb ist $(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \circ) \cong (\{k + n\mathbb{Z} : \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}, \cdot)$.

(b) Mit (a) finden wir $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \cong \{1 + 12\mathbb{Z}, 5 + 12\mathbb{Z}, 7 + 12\mathbb{Z}, 11 + 12\mathbb{Z}\}$. Wegen $5^2 \cong 7^2 \cong 11^2 \cong 1 \mod 12$ ist dies isomorph zu $C_2 \times C_2$. Weiters ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \cong \{1 + 15\mathbb{Z}, 2 + 15\mathbb{Z}, 4 + 15\mathbb{Z}, 7 + 15\mathbb{Z}, 8 + 15\mathbb{Z}, 11 + 15\mathbb{Z}, 13 + 15\mathbb{Z}, 14 + 15\mathbb{Z}\}$. Dies muss isomorph zu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sein. Wegen $2^3 = 8$ hat $2 + 15\mathbb{Z}$ Ordnung 4. Durch ausprobieren stellen wir fest, dass dies ein Element mit maximaler Ordnung ist. Somit ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \cong C_2 \times C_4$.

Wir müssen also Homomorphismen $\psi_i\colon C_2 \times C_2 \to C_2 \times C_4$ finden, sodass $(C_2 \times C_2)/\ker(\psi_i)$ paarweise nicht isomorph sind. Sei g ein Erzeuger von C_2 und sei h ein Erzeuger von C_4. Sei ψ_1 der triviale Homomorphismus, dann ist $(C_2 \times C_2)/\ker(\psi_1) \cong \{e\}$. Sei ψ_2 gegeben durch $\psi_2(g, e) = (g, e)$ und $\psi_2(e, g) = (e, e)$. Dann ist $(C_2 \times C_2)/\ker(\psi_2) \cong C_2$. Sei ψ_3 gegeben durch $\psi_2(g, e) = (g, e)$ und $\psi_2(e, g) = (e, h^2)$. Dann ist ψ_3 injektiv und daher gilt $(C_2 \times C_2)/\ker(\psi_2) \cong C_2 \times C_2$.

Zurückübersetzt in Homomorphismen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ nach $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ entsprechen diese zum Beispiel folgenden Homomorphismen. Der Homomorphismus ψ_1 schickt jeden Automorphismus auf die Identität. Der Homomorphismus ψ_2 schickt Multiplikation mit 11 nach Multiplikation mit 11 und Multiplikation mit $1, 5, 7$ auf die Identität. Der Homomorphismus ψ_3 schickt Elemente der Ordnung 2 aufeinander, also zum Beispiel Multiplikation mit 5 auf Multiplikation mit 4, Multiplikation mit 7 auf Multiplikation mit 4 und Multiplikation mit 14 auf Multiplikation mit 11.

28. (a) Zeige, dass $\langle(1, 1)\rangle \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht Produktform hat. Das heisst, es existieren keine Untergruppen $H_1, H_2 \leqslant \mathbb{Z}$ mit $\langle(1, 1)\rangle = H_1 \times H_2$.

(b) Zeige, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ trivial oder unendliich zyklisch ist. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.

(c) Sei $G = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Zeige, dass der Index $[G : G^2]$ unendlich ist.

Lösung: (a) Seien $H_1, H_2 \leqslant \mathbb{Z}$. Falls $H_1 = \{0\}$ ist, gilt $H_1 \times H_2 \leqslant \mathbb{Z} \times \{0\}$, also insbesondere auch $\langle(1, 1)\rangle \neq H_1 \times H_2$. Deshalb wissen wir $H_1 \neq \{0\} \neq H_2$ und somit $H_1, H_2 \cong \mathbb{Z}$. Dann ist aber $H_1 \times H_2 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht zyklisch und kann daher nicht gleich $\langle(1, 1)\rangle$ sein.

(b) Seien $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ mit $\mathrm{ggT}(p_i, q_i) = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Sei $1 \leqslant i \leqslant n$ beliebig. Wegen

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_i \cdot \mathrm{kgV}(q_1, \dots, q_n)}{q_i} \cdot \frac{1}{\mathrm{kgV}(q_1, \dots, q_n)}$$

und

$$\frac{p_i \cdot \mathrm{kgV}(q_1, \dots, q_n)}{q_i} \in \mathbb{Z}$$

liegt

$$\frac{p_i}{q_i} \in \left\langle \frac{1}{\mathrm{kgV}(q_1, \dots, q_n)} \right\rangle.$$

Da i beliebig war, impliziert das, dass

$$\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \in \left\langle \frac{1}{\mathrm{kgV}(q_1, \dots, q_n)} \right\rangle$$

liegt. Also gilt auch

$$\left\langle \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \right\rangle \leqslant \left\langle \frac{1}{\mathrm{kgV}(q_1, \dots, q_n)} \right\rangle.$$

Somit ist $\langle \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \rangle$ eine Untergruppe einer unendlich zyklischen Gruppe und nach Aufgabe 12 ebenfalls unendlich zyklisch.

(c) Seien p und q verschiedene Primzahlen in $\mathbb{N} \subset G$. Dann liegt $q^{-1}p = \frac{p}{q}$ nicht in G^2. Das bedeutet nach Aufabe 14, dass $pG^2 \neq qG^2$ ist. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, muss G/G^2 unendlich viele Elemente haben. Also ist der Index $[G : G^2]$ unendlich.

29. Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

(a) Beweise folgende Variante des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen (Korollar 4.5): Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppen. Dann existieren natürliche Zahlen n, k, paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ und für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ existiert eine positive natürliche Zahl i_r und positive natürliche Zahlen $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ii_r}$ mit

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i_r} C_{p_i^{\alpha_{ij}}} \right) \times \mathbb{Z}^k.$$

Der Hauptsatz darf dabei verwendet werden.

(b) Zeige: Diese Zerlegung ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(c) Zeige: Die Zerlegung Korollar 4.5 ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

(d) Bestimme, bis auf Isomorphie, alle abelschen Gruppen der Ordnung 72.

Lösung: (a) Laut Vorlesung existieren natürliche Zahlen k und $n_1 | \dots | n_s$ mit

$$G \cong C_{n_1} \times \dots \times C_{n_s} \times \mathbb{Z}^k.$$

Für jedes $1 \leqslant i \leqslant s$ können wir n_i als $n_i = \prod_{j=1}^{k_{n_i}} p_{n_ij}^{\alpha_{n_ij}}$ in Primfaktoren zerlegen und es gilt mit Aufgabe 7, dass $C_{n_i} \cong \prod_{j=1}^{k_{n_i}} C_{p_{n_ij}^{\alpha_{n_ij}}}$ ist. Also gilt

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{n_s} \prod_{j=1}^{k_{n_i}} C_{p_{n_ij}^{\alpha_{n_ij}}} \right) \times \mathbb{Z}^k.$$

Durch Umsortierung der Faktoren folgt die Behauptung.

(b) Seien

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i_r} C_{p_i^{\alpha_{ij}}}\right) \times \mathbb{Z}^k$$

und

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{i_s} C_{q_i^{\beta_{ij}}}\right) \times \mathbb{Z}^l.$$

zwei Zerlegungen.

Wir zeigen zuerst $k = l$. Nach Aufgabe 6b ist die Menge E aller Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe von G. Es gilt $G/E \cong \mathbb{Z}^k$ und $G/E \cong \mathbb{Z}^l$. Damit folgt $\mathbb{Z}^k \cong \mathbb{Z}^l$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k \leqslant l$ und sei $\varphi\colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^l$ ein Gruppenisomorphismus. Der $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^l$, der von $\varphi(\mathbb{Z}^k)$ erzeugt wird, kann höchstens k-dimensional sein, da er von den Bildern der k Erzeugern von $\mathbb{Z}^k$ erzeugt wird. Der von $\mathbb{Z}^l$ erzeugte $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^l$ hat allerdings Dimension l. Da φ surjektiv ist, müssen diese beiden Untervektorräume gleich sein. Daher gilt $k = l$.

Ebenfalls nach Aufgabe 6b ist für jede Primzahl p die Menge aller Elemente, deren Ordnung eine Potenz von p ist, eine Untergruppe. Da ein Isomorphismus die Ordnung der Elemente erhält, muss es für jedes $p_i \in \{p_1, \ldots, p_n\}$ ein $q_{i'} \in \{q_1, \ldots, q_n\}$ geben mit $p_i = q_{i'}$, sodass

$$\prod_{j=1}^{i_r} C_{p_i^{\alpha_{ij}}} \cong \prod_{j=1}^{i'_s} C_{q_{i'}^{\beta_{i'j}}}$$

gilt, und umgekehrt muss es auch für jedes $q_{i'}$ ein solches p_i geben. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die α_{ij} und $\beta_{i'j}$ absteigend der Grösse nach geordnet und sei $\alpha_{i1} = \cdots = \alpha_{ij_i}$ und $\beta_{i'1} = \cdots = \beta_{i'j_{i'}}$. Dann ist $\prod_{j=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{ij}}}$ von den Elementen maximaler Ordnung erzeugt, ebenso $\prod_{j=1}^{j_{i'}} C_{q_{i'}^{\beta_{i'j}}}$. Daher müssen diese Gruppen gleich sein. Es folgt $j_i = j_{i'}$ und $\alpha_{i1} = \beta_{i'1}$. Dieses Argument können wir jetzt für

$$\prod_{j=1}^{i_r} C_{p_i^{\alpha_{ij}}} \Big/ \prod_{j=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{ij}}} \cong \prod_{j=1}^{i'_s} C_{q_{i'}^{\beta_{i'j}}} \Big/ \prod_{j=1}^{j_{i'}} C_{q_{i'}^{\beta_{i'j}}}$$

wiederholen und die Behauptung ergibt sich induktiv.

(c) Das Argument funktioniert ähnlich wie in (b). Wir können genau gleich schliessen, dass k eindeutig ist. Als nächstes betrachten wir wie oben die Untergruppe, die von den Elementen maximaler Ordnung erzeugt wird.

(d) Wir zerlegen $72 = 2^3 \times 3^2$. Daher sind alle möglichen abelschen Gruppen dieser Ordnung bis auf Isomorphie

$$\begin{aligned}
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 &\cong C_2 \times C_6 \times C_6\\
C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 &\cong C_2 \times C_2 \times C_{18}\\
C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 &\cong C_6 \times C_{12}\\
C_4 \times C_2 \times C_9 &\cong C_2 \times C_{36}\\
C_8 \times C_3 \times C_3 &\cong C_3 \times C_{24}\\
C_8 \times C_9 &\cong C_{72}.
\end{aligned}$$

30. Seien G und H abelsche Gruppen und seien $\varphi\colon G \to H$ und $\psi\colon H \to G$ Homomorphismen mit den folgenden Eigenschaften:

- $\psi \circ \varphi(G) = 2G$;
- $\varphi \circ \psi(H) = 2H$;
- $[H : \varphi(G)] < \infty$;
- $[G : \psi(H)]$.

Dann gilt $[G : 2G] \leqslant [G : \psi(H)] \cdot [H : \varphi(G)] < \infty$.

Lösung: Wir zeigen zuerst: Sei ein A, B abelsche Gruppen, $\Phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus und $A' \leqslant A$ eine Untergruppe. Dann gilt $[\Phi(A) : \Phi(A')] \leqslant [A : A']$.

Betrachte den induzierten Homomorphismus $\bar{\Phi}\colon A \to \Phi(A)/\Phi(A')$. Er ist offensichtlich surjektiv und sein Kern ist $\Phi^{-1}(\Phi(A')) \supset A'$. Nach dem ersten Isomorphiesatz ist $A/\Phi^{-1}(\Phi(A')) \cong \Phi(A)/\Phi(A')$. Ausserdem gibt es einen surjektiven Homomorphismus $A/A' \to A/\Phi^{-1}(\Phi(A'))$. Damit sind wir fertig.

Es gilt $2G \subset \psi(H)$. Also folgt mit der Multiplikativität des Index (3. Isomorphiesatz)

$$\begin{aligned}
[G : 2G] &= [G : \psi(H)] \cdot [\psi(H) : 2G] \\
&= [G : \psi(H)] \cdot [\psi(H) : \psi(\varphi(G))] \\
&\leqslant [G : \psi(H)] \cdot [H : \varphi(G)] < \infty.
\end{aligned}$$