Algebra I

Musterlösung 3

Zentrum, Homomorphismen, Isomorphiesätze

---

19. Für eine Gruppe G und $x \in G$ sei

$$Z_G(x) := \{g \in G : gx = xg\}$$

der **Zentralisator** von x in G.

(a) Zeige: Für jedes $x \in G$ gilt $Z_G(x) \leqslant G$.

(b) Bestimme die Zentralisatoren aller Elemente von D_n.

(c) Bestimme das Zentrum von D_n.

Lösung: (a) Sei $x \in G$. Wegen $ex = xe$ ist $Z_G(x) \neq \varnothing$. Seien nun $g, h \in Z_G(x)$. Dann gilt $ghx = gxh = xgh$, deshalb ist $gh \in Z_G(x)$. Ausserdem folgt aus $gx = xg$ durch Links- und Rechtsmultiplikation von g^{-1} auch $xg^{-1} = g^{-1}x$. Folglich ist auch $g^{-1} \in Z_G(x)$ und somit ist $Z_G(x)$ eine Untergruppe von G.

(b) We know that $D_n = \{1, T, \ldots, T^{n-1}, S, ST, \ldots, ST^{n-1}\}$, where T is a rotation of order n and S is a reflection through a fixed axis of symmetry of a regular n-gon. For every $0 < i < n$ the element ST^i then is a reflection through one of the remaining axes of symmetry.

A fundamental fact about dihedral groups is the formula $S'T^j = T^{-j}S'$ for any reflection $S' = ST^i$ and any j. Geometrically this means that a reflection followed by a rotation followed by the same reflection as before is the inverse of the rotation. It may be checked by geometry or by the effect on the vertices of the dihedron.

Consider now an arbitrary rotation T^i with $0 \leqslant i < n$. If $i = 0$, then $T^i = 1$, whose centralizer is the whole group. Suppose that $i \neq 0$. Since $T^iT^j = T^{i+j} = T^jT^i$, we see that T^i commutes with all other rotations. A reflection $S' = ST^j$ commutes with T^i if and only if $T^i = T^{-i}$. This is equivalent to $T^{2i} = 1$, that is, to $n|2i$. Since $0 < i < n$, this holds if and only if n is even and $i = n/2$. It follows that

$$Z_{D_n}(T^i) = \begin{cases} D_n & \text{for } n \text{ even and } i = n/2 \\ \langle T \rangle = \{1, T \ldots T^{n-1}\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For an arbitrary reflection S' the equality $S'T^i = T^{-i}S'$ and the argument above show that $T^i \in Z_{D_n}(S')$ if and only if $i = 0$ or n is even with $i = n/2$. Given another reflection $S'' = ST^j$ we have

$$S'S'' = ST^iST^j = S^2T^{j-i} = T^{j-i}$$

and

$$S''S' = ST^jST^i = S^2T^{i-j} = T^{i-j}.$$

Thus $S'S'' = S''S'$ if and only if $n|2(i-j)$, which is equivalent to $S'' = S'$ or $S'' = S'T^{n/2}$ with n even. Therefore

$$Z_{D_n}(S') = \begin{cases} \langle S', T^{n/2} \rangle = \{1, T^{n/2}, S', S'T^{n/2}\} & \text{if } n \text{ is even} \\ \langle S' \rangle = \{1, S'\} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

(c) The center $Z(D_n)$ consists of exactly the elements whose centralizers are the entire group, which we determined above. If $n \leqslant 2$, any element of D_n has this property, while for $n \geqslant 3$, only the identity element and $T^{n/2}$ if $2|n$ have it. Therefore

$$Z(D_n) = \begin{cases} D_n & \text{if } n \leqslant 2, \\ \langle T^{n/2} \rangle = \{1, T^{n/2}\} & \text{if } n \geqslant 3 \text{ even,} \\ \{1\} & \text{if } n \geqslant 3 \text{ odd.} \end{cases}$$

20. Zeige: Gilt $N \trianglelefteq Z(G) \trianglelefteq G$ und ist G/N zyklisch oder unendlich zyklisch, so ist G abelsch.

Lösung: Sei G/N erzeugt von xN für ein $x \in G$. Für jedes Element g von G gibt es dann eine ganze Zahl n mit $gN = x^n N$, also insbesondere mit $g \in x^n N$. Daher erzeugen N und x die ganze Gruppe G. Da sowohl N (als Teilmenge des Zentrums von G) als auch x im Zentralisator G_x von x liegen und $Z_G(x)$ eine Untergruppe ist, folgt deshalb $G_x = G$. Dies ist äquivalent dazu, dass x im Zentrum von G liegt. Das Zentrum enthält aber auch N, also ausserdem die von N und x erzeugte Untergruppe. Somit ist es ebenfalls gleich ganz G. Daher ist G abelsch.

Variante: Für beliebige Elemente g, h gibt es ganze Zahlen m und n mit $gN = x^m N$ und $hN = x^n N$. Daher existieren a, $b \in N \subset Z(G)$ mit $g = x^m a$ und $h = x^n b$. Da a und b im Zentrum liegen, folgt

$$gh = x^m a x^n b = x^m x^n ab = x^n x^m ba = x^n b x^m a = hg.$$

Somit ist G abelsch.

21. Zeige, dass die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind. Finde jeweils den Kern und das Bild.

(a) Die Betragsfunktion: $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad z \mapsto |z|$.

(b) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad f(x) := e^{ix}$.

(c) $g : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \quad g(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$.

Lösung: (a) Aus der Analysis wissen wir, dass für alle $w, z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $|wz| = |w||z|$ gilt. Das bedeutet, dass die Betragsfunktion ein Gruppenhomomorphismus ist. Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir können in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ schreiben. Es gilt $|z| = r$. Also ist das Bild der Betragsfunktion genau $\mathbb{R}^+$. Ausserdem gilt genau dann $|z| = 1$, wenn $r = 1$ gilt. Der Kern ist also $\mathbb{U}$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Aus der Analysis wissen wir, dass $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ gilt. Das bedeutet, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist. Der Kern von f ist $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$. Das Bild von f ist $\mathbb{U}$.

(c) Considering the entries of a matrix $g(s)g(t)$ for real s and t, we need to compute

$$\cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t) = \frac{(e^s + e^{-s})(e^t + e^{-t})}{4} + \frac{(e^s - e^{-s})(e^t - e^{-t})}{4} =$$
$$= \frac{e^{s+t} + e^{-s-t}}{2} = \cosh(s+t)$$

and

$$\cosh(s)\sinh(t) + \sinh(s)\cosh(t) = \frac{(e^s + e^{-s})(e^t - e^{-t})}{4} + \frac{(e^s - e^{-s})(e^t + e^{-t})}{4} =$$
$$= \frac{e^{s+t} - e^{-s-t}}{2} = \sinh(s+t)$$

so that

$$g(s)g(t) = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh(s+t) & \sinh(s+t) \\ \sinh(s+t) & \cosh(s+t) \end{pmatrix} = g(s+t)$$

and g is a group homomorphism.

Now let us compute the kernel of g. We have

$$\ker(g) = \{s \in \mathbb{R} : \cosh(s) = 1, \sinh(s) = 0\} = \{0\}$$

because $\sinh(s) = 0$ is equivalent to $e^x = e^{-x}$, i.e. $x = 0$ (being $x \in \mathbb{R}$). Hence the map g is injective, and $\mathbb{R} \cong g(\mathbb{R})$. It can be easily shown that

$$g(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} : x^2 - y^2 = 1, x > 0 \right\} \leqslant \{A \in SL_2(\mathbb{R}) | A^T = A\}.$$

22. Seien G, H zei Gruppen und sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphism. Stimmen folgende Aussagen?

(a) Ist $N \trianglelefteq G$, dann ist $\varphi(N) \trianglelefteq \varphi(G)$.

(b) Ist $N \trianglelefteq G$, dann ist $\varphi(N) \trianglelefteq H$.

(c) Ist $N \trianglelefteq H$, dann ist $\varphi^{-1}(N) \trianglelefteq G$.

Lösung: (a) Seien $n \in \varphi(N)$ und $g \in \varphi(G)$. Es existieren Urbilder $n' \in N$ von n und $g' \in G$ von g. Damit gilt $gng^{-1} = \varphi(g')\varphi(n')\varphi(g')^{-1} = \varphi(g'n'g'^{-1})$. Da N ein Normalteiler von G ist, gilt $g'n'g'^{-1} \in N$ und somit folgt $gng^{-1} \in \varphi(N)$. Also ist die Aussage richtig.

(b) Diese Aussage stimmt nicht. Sei zum Beispiel H eine Gruppe und $G \leqslant H$ kein Normalteiler. Dann gilt mit $N = G$ und $\varphi = id|_G$ zwar $N \trianglelefteq G$, aber $\varphi(N) = G$ ist kein Normalteiler von H.

(c) Seien $n \in \varphi^{-1}(N)$ und $g \in \varphi^{-1}(G)$. Für diese gilt $\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g)^{-1}$. Da N ein Normalteiler von H ist, gilt $\varphi(g)\varphi(n)\varphi(g)^{-1} \in N$ und somit folgt $gng^{-1} \in \varphi^{-1}(N)$. Also ist die Aussage richtig.

23. Bezeichne für jede Gruppe Γ mit $\mathrm{Sub}(\Gamma)$ die Menge aller Untergruppen von Γ. Sei nun G eine Gruppe und sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeige: Die Abbildung

$$\{H \in \mathrm{Sub}(G) : N \leqslant H\} \to \mathrm{Sub}(G/N), \quad H \mapsto H/N$$

ist bijektiv.

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir: Für alle $H \leqslant G$ gilt $H \cap N \trianglelefteq H$. Daher ist die Abbildung wohldefiniert. Seien nun $H, H' \leqslant G$ mit $N \leqslant H, H'$ und $H/N = H'/N$. Seien $h \in H, h' \in H'$ mit $hN = h'N$. Dann folgt $h^{-1}h' \in N \leqslant H$ und damit $h' \in H$. Analog folgt $h \in H'$. Das zeigt, dass $H = H'$ gelten muss und wir haben Injektivität gezeigt. Betrachte nun eine Untergruppe $M \leqslant G/N$. Die kanonische Projektion $\pi\colon G \to G/N$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Also ist $\pi^{-1}(M)$ eine Untergruppe von G. Offensichtlich gilt $N = \pi^{-1}(eN) \leqslant \pi^{-1}(M)$ und $\pi^{-1}(M)/N = \pi(\pi^{-1}(M)) = M$.

24. *Dritter Isomorphiesatz.* Sei G eine Gruppe und seien N, M Normalteiler von G mit $M \trianglelefteq N$. Dann ist $N/M \trianglelefteq G/M$ und es gilt $G/N \cong (G/M)/(N/M)$

Lösung: Sei $\pi\colon G \to G/M$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi(N) = N/M$ und π ist surjektiv. Mit Aufgabe 22/a) folgt, dass $N/M \trianglelefteq G/M$ ist.

Betrachte $\varphi\colon G/M \to G/N$, $\varphi(gM) = gN$. Wir müssen zuerst zeigen, dass das eine wohldefinierte Abbildung ist. Seien $g, g' \in G$ mit $gM = g'M$. Dann folgt $g'g^{-1} \in M \leqslant N$, also gilt auch $\varphi(g'M) = g'N = gN = \varphi(gM)$, also ist φ wohldefiniert. Weiter ist φ ein Gruppenhomomorphismus, da für alle $g, g' \in G$ die Gleichung $\varphi(gMg'M) = \varphi(gg'M) = gg'N = gNg'N = \varphi(gM)\varphi(g'M)$ gilt. Surjektivität von φ ist offensichtlich. Der Kern von φ ist $\ker(\varphi) = \{gM \in G/M : gN = N\} = N/M$. Nach dem ersten Isomorphiesatz gilt nun $G/N \cong (G/M)/\operatorname{Ker}(\varphi) = (G/M)/(N/M)$.