

# Algebra II

## Serie 23

Radikalerweiterungen

Abgabe 29. Mai

---

**137.** Finde eine Radikalerweiterung von  $\mathbb{Q}$ , welche die folgende komplexe Zahl enthält.

(a)  $\frac{\sqrt{11} - \sqrt[3]{23}}{\sqrt[4]{5}}$

(b)  $(\sqrt{6} + 2\sqrt[3]{5})^4$

(c)  $\frac{2\sqrt[5]{5}-4}{\sqrt{1+\sqrt{99}}}$

**138.** (a) Sei  $K : \mathbb{Q}$  eine normale Erweiterung, sodass  $[K : \mathbb{Q}]$  eine ungerade Primzahl ist.

Zeige: Wenn  $K \subseteq \mathbb{R}$  gilt, dann ist  $K : \mathbb{Q}$  keine Radikalerweiterung.

(b) Finde ein Beispiel von Körpererweiterungen  $M : L : K$ , sodass  $M : K$  eine Radikalerweiterung ist,  $L : K$  aber nicht.

**139.** Sei  $K$  ein Körper und  $f \in K[X]$  ein irreduzibles Polynom.

Zeige: Ist eine Nullstelle von  $f$  durch Radikale ausdrückbar, so gilt das für alle Nullstellen.

**140.** Sei  $L : K$  eine Radikalerweiterung in  $\mathbb{C}$  und sei  $\tilde{L}$  die normale Hülle von  $L : K$ .

Zeige:  $\tilde{L} : K$  ist eine Radikalerweiterung.

**141.** Sei  $L : K$  eine Radikalerweiterung.

Zeige: Es existieren  $\beta_1, \dots, \beta_k \in L$  und Primzahlen  $p_1, \dots, p_k$  mit  $\beta_j^{p_j} \in K(\beta_1, \dots, \beta_{j-1})$  für alle  $1 \leq j \leq k$ .