Algebra II

Serie 22

Kreisteilungskörper, auflösbare Gruppen Abgabe 22. Mai

---

132. Sei p eine Primzahl und sei $\xi := e^{i\frac{2\pi}{p}}$.
Zeige: $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}\big) \cong C_{p-1}$.

133. Finde ein Beispiel einer Gruppe G und Untergruppen $H, N \leq G$, sodass $H \trianglelefteq N$ und $N \trianglelefteq G$ ist, aber H ist kein Normalteiler von G.

Eine Gruppe G heisst **auflösbar**, falls eine Folge von Untergruppen $H_i \leq G$ existiert mit $\{e\} = H_0 \leq \cdots \leq H_n = G$, so dass für alle $0 \leq i \leq n-1$ gilt

- $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$,
- H_{i+1}/H_i ist abelsch.

134. (a) Zeige, dass für $n = 2, 3, 4$ die Gruppe S_n auflösbar ist.

(b) Zeige, dass für $n \geq 5$ die Gruppe S_n nicht auflösbar ist.

135. Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

i. Die Gruppe G ist auflösbar.

ii. Die Gruppe G besitzt eine Subnormalreihe $\{e\} = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G$, sodass H_{i+1}/H_i jeweils zyklisch mit primer Ordnung ist.

136. Sei G eine Gruppe, sei $H \leq G$ eine Untergruppe, und sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Ist G auflösbar, so ist auch H auflösbar.

(b) Ist G auflösbar, so ist auch G/N auflösbar.

(c) Sind N und G/N auflösbar, so ist auch G auflösbar.