

Algebra II

Serie 21

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, symmetrische Gruppen

Abgabe 15. Mai

- 126.** Zeige, dass ein reguläres Pentagon mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist,
- (a) abstrakt mit Hilfe von Körpertheorie.
 - (b) durch Angabe einer expliziten Konstruktion.
- 127.** (a) Zeige, dass sich ein Winkel α genau dann mit Zirkel und Lineal dreiteilen lässt, wenn das Polynom $4X^3 - 3X - \cos(\alpha)$ reduzibel über $\mathbb{Q}(\cos(\alpha))$ ist.
- (b) Zeige, dass für jede nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl n die Dreiteilung des Winkels $\frac{2\pi}{n}$ möglich ist.
- 128.** Sei $\zeta := e^{2\pi i/p}$ für eine ungerade Primzahl p . Zeige:
- (a) $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = p - 1$. (*Hinweis:* Eisenstein-Kriterium.)
 - (b) Ist ein regelmässiges p -Eck konstruierbar, so ist p eine *Fermat-Primzahl*, das heisst, $p = 2^{2^k} + 1$ für ein $k \geq 0$.
- 129.** Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Körper der über \mathbb{Q} mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen. Zeige, dass $L : \mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung ist.
- 130.** Sei $n = 2^k$ eine Zweierpotenz, sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n und sei L dessen Zerfällungskörper über \mathbb{Q} .
Zeige: Falls $[L : \mathbb{Q}]$ einen ungeraden Primteiler hat, so ist keine Nullstelle von f mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
- 131.** Sei $n \geq 5$ eine natürliche Zahl.
- (a) Zeige, dass die Gruppe A_n einfach ist.
Hinweis: Sei $N \trianglelefteq A_n$ ein nichttrivialer Normalteiler. Zeige, dass N einen 3-Zykel der Form $ngn^{-1}g^{-1}$ mit $n \in N$ und $g \in A_n$ enthält.
 - (b) Folgere daraus, dass A_n der einzige nichttriviale Normalteiler von S_n ist.