Algebra I

Serie 12

rationale Punkte auf Kurven zweiter und dritter Ordnung Besprechung 19. Dezember

---

76. Gegeben sei die Ellipse $e\colon 8x^2 + 15y^2 - 6xy - 18x - 6y - 9 = 0$ in $\mathbb{R}^2$ sowie der Punkt $P = (0, 1)$ auf der Ellipse.

(a) Schreibe die Gleichung der Ellipse in homogenen Koordinaten.

(b) Bestimme den zweiten Schnittpunkt Q der Geraden $Y - Z = 0$ mit der Ellipse.

(c) Bestimme die beiden Geradengleichungen der Tangenten an die Ellipse durch die Punkte P und Q.

(d) Finde eine projektive Transformation, welche die Gerade PQ auf $X = 0$ abbildet und die beiden Tangenten auf $Y = 0$ *bzw.* $Z = 0$ abbildet.

(e) Bestimme die Gleichung der Bildkurve der Ellipse unter dieser Transformation.
Hinweis: Die Bildkurve der Ellipse unter dieser Transformation ist eine Parabel.

77. Bestimme mit der Parabel aus Aufgabe 76 alle rationalen Punkte in $\mathbb{R}^2$ auf der Ellipse.

78. Zeige: Ist $P = (x, y)$ ein rationaler Punkt auf der Kurve $C[a, b]$, so gilt

$$x = \frac{m}{e^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{n}{e^3}$$

mit $m, n, e \in \mathbb{Z}$ und $(m, e) = 1 = (n, e)$.

Eine positive natürliche Zahl k heisst ***kongruente Zahl***, falls es positive rationale Zahlen a, b, c gibt, für die gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}ab = k.$$

Mit anderen Worten ist k eine kongruente Zahl, falls k der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit rationalen Seiten ist.

Sei nun n eine positive natürliche Zahl. Dann definieren wir

$$K_n := \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a, b, c > 0,\ a^2 + b^2 = c^2,\ \tfrac{1}{2}ab = n\}.$$

Weiter sei die Kurve C_n wie folgt definiert:

$$C_n : y^2 = x^3 - n^2 x$$

Es sei V_n die Menge aller rationalen Punkte auf C_n im ersten Quadranten von $\mathbb{Q}^2$:

$$V_n := C_n(\mathbb{Q}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x, y > 0\}.$$

79. Zeige, dass für eine kongruente Zahl n ein Punkt $(x, y) \in V_n$ existiert, welcher

$$x = \left(\frac{p}{2q}\right)^2$$

erfüllt, das heisst, x ist das Quadrat einer rationalen Zahl mit geradem Nenner.

Hinweis: Finde eine Bijektion

$$\{x \in \mathbb{Q} : x - n, x, x + n \text{ Quadrate in } \mathbb{Q}\} \to \{(a, b, c) \in K_n : a < b < c\}.$$

80. (a) Finde eine Bijektion $V_n \to K_n$. Folgere, dass n genau dann eine kongruente Zahl ist, wenn $V_n \neq \emptyset$ gilt.

(b) Sei n eine kongruente Zahl. Zeige: Ist $P = (x, y) \in V_n$, so tritt für $2P = (x', y')$ genau einer der folgenden Fälle ein:

$$2P \in V_n, \qquad -2P \in V_n, \qquad y' = 0$$

(c) Finde zur kongruenten Zahl 6 mindestens zwei rechtwinklige Dreiecke mit rationalen Seiten der Fläche 6.