Algebra I

Serie 3

Zentrum, Homomorphismen, Isomorphiesätze Abgabe bis 21. Oktober

---

19. Für eine Gruppe G und $x \in G$ sei

$$Z_G(x) := \{g \in G : gx = xg\}$$

der **Zentralisator** von x in G.

(a) Zeige, dass für jedes $x \in G$ gilt $Z_G(x) \leqslant G$.

(b) Bestimme die Zentralisatoren aller Elemente von D_n.

(c) Bestimme das Zentrum von D_n.

20. Zeige: Gilt $N \trianglelefteq Z(G) \trianglelefteq G$ und ist G/N zyklisch, so ist G abelsch.

21. Zeige, dass die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind. Finde jeweils das Kern und das Bild.

(a) Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times,\ f(x) = e^{ix}$.

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}),\ g(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$.

22. Seien G, H zei Gruppen und sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphism. Stimmen folgende Aussagen?

(a) Ist $N \trianglelefteq G$, dann ist $\varphi(N) \trianglelefteq \varphi(G)$.

(b) Ist $N \trianglelefteq G$, dann ist $\varphi(N) \trianglelefteq H$.

(c) Ist $N \trianglelefteq H$, dann ist $\varphi^{-1}(N) \trianglelefteq G$.

23. Sei G eine Gruppe und sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeige: Die Abbildung

$$\{H \leqslant G : N \leqslant H\} \to \{M \leqslant G/N\}, \quad H \mapsto H/N$$

ist bijektiv.

24. *Dritter Isomorphiesatz.* Sei G eine Gruppe und seien N, M Normalteiler von G mit $M \trianglelefteq N$. Dann ist $N/M \trianglelefteq G/M$ und es gilt $G/N \cong (G/M)/(N/M)$