Algebra I

Serie 2

Untergruppen, Nebenklassen, Normalteiler Abgabe bis 14. Oktober

---

13. Seien $m = 12$ und $n = 21$ und sei g ein Erzeuger der zyklischen Gruppe C_{mn}. Weiter sei $x := g^{120}$.

(a) Zeige: $\operatorname{ord}(x) = n$.

(b) Finde mehrere Elemente $y, z \in C_{mn}$ mit

$$C_{mn} \neq \langle z \rangle, \quad C_{mn} = \langle y \rangle \quad \text{und} \;\; z^m = y^m = x\,.$$

14. Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$. Definiere folgende Relation auf G:

$$g \sim g' \;\Leftrightarrow\; g'^{-1}g \in H.$$

(a) Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeige, dass Äquivalenzklassen genau die Linksnebenklassen von H sind.

(c) Nimm an, die Vorschrift $[g] \circ [g'] := [gg']$ definiere eine wohldefinierte binäre Operation auf G/H. Zeige, dass H ein Normalteiler von G ist. (*Bemerkung:* In der Vorlesung wurde die Umkehrung dieser Aussage gezeigt.)

15. Sei G eine Gruppe und seien U, V nichtleere Teilmengen von G. Wir definieren

$$UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$$
$$U^{-1} := \{u^{-1} \mid u \in U\}.$$

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i. U ist eine Untergruppe von G.

ii. $UU \subseteq U$ und $U^{-1} \subseteq U$.

iii. $UU^{-1} \subseteq U$.

(b) Falls U und V Untergruppen von G sind, dann ist UV genau dann eine Untergruppe von G, wenn $UV = VU$ gilt.

(c) Ist U endlich, dann ist U bereits dann eine Untergruppe, wenn $UU \subseteq U$ gilt.

16. Sei $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass $\mathbb{U}$ ein Normalteiler von $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ist.

(b) Beschreibe die Menge $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$.

(c) Finde eine Gruppe, die isomorph zur Faktorgruppe $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$ ist.

17. Finde alle Untergruppen von D_4 sowie alle Inklusionen zwischen diesen. Gib an, in welchen Fällen es sich um einen Normalteiler handelt und bestimme die entsprechende Faktorgruppe.

18. Sei T die Symmetriegruppe des regulären Tetraeders.

(a) Bestimme $|T|$.

(b) Zeige, dass T nicht abelsch ist.

(c) Bestimme alle Untergruppen von T.

(d) Bestimme, welche Untergruppen von T zueinander konjugiert sind. Welche sind nichttriviale Normalteiler?