

Algebra I

Serie 0

Gruppenaxiome

Abgabe bis 30. September

0. Sei \circ eine assoziative binäre Operation auf einer nichtleeren Menge S , d.h. für alle x, y, z in S gilt

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z.$$

Zeige, dass für alle $a, b, c, d \in S$ gilt

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ (b \circ c)) \circ d.$$

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ und sei

$$\begin{aligned} \star : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto \text{ggT}(a, b), \end{aligned}$$

wobei $\text{ggT}(a, b)$ den *grössten gemeinsamen Teiler* von a und b bezeichnet.

- (a) Zeige, dass die Operation \star kommutativ und assoziativ ist.
 (b) Zeige, dass (A, \star) ein Neutralelement hat.
 (c) Zeige, dass (A, \star) keine Gruppe ist.

Bemerkung: Solche Strukturen werden *kommutative Monoide* genannt.

2. Sei $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und sei \bullet die binäre Operation auf \mathbb{Q}^* , welche wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* &\rightarrow \mathbb{Q}^* \\ (p, q) &\mapsto 2pq. \end{aligned}$$

Zeige, dass (\mathbb{Q}^*, \bullet) eine abelsche Gruppe ist.

3. Sei $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^* := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(0, 0)\}$ und sei \bullet die binäre Operation auf $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^*$, welche wie folgt definiert ist:

$$(p_1, q_1) \bullet (p_2, q_2) := (p_1 p_2 - q_1 q_2, p_1 q_2 + q_1 p_2).$$

Zeige, dass $((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^*, \bullet)$ eine abelsche Gruppe ist.

4. Sei (G, \circ) eine Gruppe mit Neutralelement e .

Zeige: Gilt für jedes $a \in G$, $a \circ a = e$, so ist G abelsch.

5. (a) Zeige: Jede Gruppe mit genau vier Elementen ist abelsch.
 (b) Finde zwei verschiedene (d.h. nicht isomorphe) Gruppen mit jeweils genau vier Elementen.