§ 70. Der Wohlordnungssatz

Wohl die wichtigste Konsequenz des Auswahlpostulats ist der Zermelosche *Wohlordnungssatz*:

Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

ZERMELO hat für den Satz zwei Beweise gegeben[1]. Der erste kann nach H. KNESER etwas vereinfacht und so formuliert werden:

Es sei M eine Menge. Jede echte Teilmenge N von M hat eine nicht leere Komplementärmenge $M - N$. Nach dem Auswahlprinzip gibt es eine Funktion $\varphi(N)$, die jeder echten Teilmenge N ein Element von $M - N$ zuordnet.

Unter einer *φ-Kette* verstehen wir jetzt eine Teilmenge K von M mit einer bestimmten Wohlordnung derart, daß für jedes y in K die Beziehung

$$y = \varphi(K_y)$$

gilt. Dabei ist K_y wieder der Abschnitt von K, der aus allen x besteht, die dem y in der Wohlordnung von K vorangehen.

Jetzt kann man alle Schlüsse anwenden, die in § 69 zum Beweis des Fundamentallemmas angewandt wurden, mit φ-Ketten statt fg-Ketten. Man bildet also die Vereinigung V aller φ-Ketten und zeigt: V ist wohlgeordnet, V ist eine φ-Kette, und wenn man zu V noch ein Element w hinzunimmt, so ist $\{V, w\}$ keine φ-Kette mehr.

Wäre nun $V \neq M$, so könnte man in $M - V$ das ausgezeichnete Element $w = \varphi(V)$ bilden und es als letztes Element zu V hinzufügen. Die erweiterte Menge $\{V, w\}$ wäre dann wieder eine φ-Kette, entgegen dem eben Bemerkten. Somit bleibt nur die Möglichkeit übrig, daß V die ganze Menge M ist. Also hat $M = V$ eine Wohlordnung.

Die Wichtigkeit der Wohlordnung beruht auf der Möglichkeit, die Methode der vollständigen Induktion, die uns von den abzählbaren Mengen her bekannt ist, auf beliebige wohlgeordnete Mengen auszudehnen. Das soll im nächsten Paragraphen geschehen.

§ 71. Die transfinite Induktion

Der Beweis durch transfinite Induktion. Um eine Eigenschaft E für alle Elemente einer wohlgeordneten Menge zu beweisen, kann man so verfahren: Man weist nach, daß die Eigenschaft E einem Element zukommt, sobald sie allen vorangehenden Elementen zukommt (also insbesondere, daß sie dem ersten Element der Menge zukommt). Dann muß die Eigenschaft E überhaupt allen Elementen zukommen. Denn gesetzt, es gäbe Elemente, die die Eigenschaft E nicht hätten, so müßte es auch ein erstes Element e geben, welches die Eigenschaft E nicht hätte. Alle vorangehenden Elemente hätten dann aber die Eigenschaft E, also e auch, was einen Widerspruch ergibt.

Die Konstruktion durch transfinite Induktion. Gesetzt, man will den Elementen x einer wohlgeordneten Menge M irgend welche neuen Objekte $\varphi(x)$ zuordnen, und man gibt, um diese zu bestimmen,

[1] Math. Ann. **59**, S. 514 (1904); Math. Ann. **65**, S. 107 (1908).

eine Relation vor, eine „rekursive Bestimmungsrelation", die immer den Funktionswert $\varphi(a)$ mit den Werten $\varphi(b)$ $(b < a)$ verknüpfen soll. Angenommen wird, daß die Relation jeweils $\varphi(a)$ eindeutig bestimmt, sobald alle Werte $\varphi(b)$ $(b < a)$ gegeben sind und untereinander allemal die gegebene Relation erfüllen. Statt einer Relation kann auch ein System von Relationen gegeben sein.

Satz. *Unter den angegebenen Voraussetzungen gibt es eine und nur eine Funktion $\varphi(x)$, deren Werte die gegebene Relation erfüllen.*

Zunächst werde die Eindeutigkeit bewiesen. Gesetzt, es gäbe zwei verschiedene Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, welche die Bestimmungsrelationen erfüllen. Dann muß es ein erstes a geben, für welches $\varphi(a) \neq \psi(a)$ ist. Für alle $b < a$ ist $\varphi(b) = \psi(b)$. Vermöge der Voraussetzung, daß die Relationen den Wert $\varphi(a)$ eindeutig bestimmen sollen, sobald alle $\varphi(b)$ gegeben sind, ist aber doch $\varphi(a) = \psi(a)$, entgegen der Annahme.

Um nun die Existenz zu beweisen, betrachten wir die Abschnitte A der Menge M. (Ein Abschnitt A ist wieder die Menge der Elemente, die einem Element a vorangehen.) Diese bilden (mit der Relation $A \subset B$ als Ordnungsrelation) eine wohlgeordnete Menge; denn jedem Element a entspricht umkehrbar eindeutig ein Abschnitt A, und aus $b < a$ folgt $B \subset A$. Nehmen wir als letzten Abschnitt noch die Menge M selbst hinzu, so bleibt die Menge wohlgeordnet.

Wir wollen nun durch Induktion nach A beweisen, daß es auf jeder der Mengen A eine Funktion $\varphi(x) = \varphi_A(x)$ gibt (definiert für alle x in A), welche den gegebenen Relationen genügt. Diese Existenz sei also für alle Abschnitte, die einem gegebenen Abschnitt A vorangehen, bewiesen. Nun gibt es zwei Fälle:

1. A hat ein letztes Element a. Auf der Menge A', die aus A durch Weglassung von a entsteht, ist eine Funktion $\varphi(x)$ definiert, da A' ein früherer Abschnitt als A ist. Durch die Gesamtheit der Werte $\varphi(b)$ $(b < a)$ ist aber vermöge der Relationen ein Wert $\varphi(a)$ definiert. Nimmt man diesen hinzu, so ist die Funktion φ für alle Elemente von A erklärt und genügt ausnahmslos den Relationen.

2. A hat kein letztes Element. Jedes Element a von A gehört also schon einem früheren Abschnitt B an. Auf jedem früheren Abschnitt B ist eine Funktion φ_B definiert. Wir wollen definieren:

$$\varphi(a) = \varphi_B(a),$$

müssen dann aber zuerst nachweisen, daß die Funktionen $\varphi_B, \varphi_C, \ldots$, die zu verschiedenen Abschnitten gehören, auf jedem gemeinsamen Punkt dieser Abschnitte übereinstimmen. Es seien also B und C verschiedene Abschnitte, und es sei etwa $B \subset C$. Dann sind φ_B und φ_C beide auf B definiert und genügen dort beide den gegebenen Relationen; also stimmen sie (nach dem Eindeutigkeitssatz, der schon

bewiesen wurde) überein. Damit erhält also die Definition $\varphi(a) = \varphi_B(a)$ einen eindeutigen Sinn. Daß die so konstruierte Funktion φ den Relationen genügt, ist klar, denn alle Funktionen φ_B tun es ja.

Sowohl im Fall 1 wie im Fall 2 gibt es demnach eine Funktion φ auf A mit den angegebenen Eigenschaften, und damit ist die Existenz der Funktion φ auf jedem Abschnitt bewiesen. Nimmt man für diesen Abschnitt insbesondere die Menge M selbst, so folgt die Behauptung.

Zehntes Kapitel

Unendliche Körpererweiterungen

Jeder Körper entsteht aus seinem Primkörper durch eine endliche oder unendliche Körpererweiterung. In den Kapiteln 6 und 8 haben wir die endlichen Körpererweiterungen studiert; in diesem Kapitel sollen die unendlichen Körpererweiterungen behandelt werden, und zwar zunächst die algebraischen, sodann die transzendenten.

Alle betrachteten Körper sind kommutativ.

§ 72. Die algebraisch-abgeschlossenen Körper

Unter den algebraischen Erweiterungen eines vorgelegten Körpers spielen naturgemäß eine wichtige Rolle die *maximalen* algebraischen Erweiterungen, d. h. die, welche sich nicht mehr algebraisch erweitern lassen. Daß solche existieren, wird in diesem Paragraphen bewiesen werden.

Damit Ω ein solcher maximaler algebraischer Erweiterungskörper ist, ist eine notwendige Bedingung, daß jedes Polynom in $\Omega[x]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt (sonst könnte man nämlich nach § 39 den Körper Ω noch erweitern durch Adjunktion einer Nullstelle eines nicht linearen Primpolynoms). Diese Bedingung reicht aber auch hin. Denn wenn jedes Polynom in $\Omega[x]$ in Linearfaktoren zerfällt, so sind alle Primpolynome in $\Omega[x]$ linear, also ist jedes Element eines algebraischen Erweiterungskörpers Ω' von Ω Nullstelle eines linearen Polynoms $x - a$ in $\Omega[x]$, also gleich einem Element a von Ω.

Wir definieren deshalb:

Ein Körper Ω heißt algebraisch-abgeschlossen, wenn in $\Omega[x]$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

Eine damit gleichwertige Definition ist: *Ω ist algebraisch-abgeschlossen, wenn jedes nicht konstante Polynom aus $\Omega[x]$ mindestens eine Nullstelle in Ω, also einen Linearfaktor in $\Omega[x]$ besitzt.*

Ist nämlich diese Bedingung erfüllt, und zerlegt man ein beliebiges Polynom $f(x)$ in Primfaktoren, so können diese nur linear sein.

Der „Fundamentalsatz der Algebra", auf den wir in § 80 zurückkommen, besagt, daß der Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen ist. Ein weiteres Beispiel eines algebraisch-abgeschlossenen Körpers ist der Körper aller komplexen algebraischen Zahlen, d. h. aller derjenigen komplexen Zahlen, die einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen. Die komplexen Wurzeln einer Gleichung mit algebraischen Koeffizienten sind nämlich nicht nur algebraisch in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen, sondern sogar algebraisch in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen, also selbst algebraische Zahlen.

Wir werden in diesem Paragraphen lernen, zu jedem Körper P einen algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper auf rein algebraischem Wege zu konstruieren. Nach E. STEINITZ gilt der folgende

Hauptsatz. *Zu jedem Körper P gibt es einen algebraisch-abgeschlossenen algebraischen Erweiterungskörper Ω. Und zwar ist dieser Körper bis auf äquivalente Erweiterungen eindeutig bestimmt: Je zwei algebraisch-abgeschlossene algebraische Erweiterungen Ω, Ω' von P sind äquivalent.*

Dem Beweis dieses Satzes müssen einige Hilfssätze vorausgeschickt werden:

Hilfssatz 1. *Es sei Ω ein algebraischer Erweiterungskörper von P. Hinreichend, damit Ω algebraisch-abgeschlossen sei, ist die Bedingung, daß alle Polynome aus $\mathsf{P}[x]$ in $\Omega[x]$ in Linearfaktoren zerfallen.*

Beweis. Es sei $f(x)$ ein Polynom aus $\Omega[x]$. Wenn es nicht in Linearfaktoren zerfiele, so könnte man eine Nullstelle α adjungieren und käme zu einem echten Oberkörper Ω'. α ist algebraisch in bezug auf Ω und Ω algebraisch in bezug auf P, also α algebraisch in bezug auf P. Daher ist α Nullstelle eines Polynoms $g(x)$ in $\mathsf{P}[x]$. Dieses zerfällt aber in $\Omega[x]$ in Linearfaktoren. Also ist α Nullstelle eines Linearfaktors in $\Omega[x]$, liegt also in Ω, entgegen der Voraussetzung.

Hilfssatz 2. *Ist ein Körper P wohlgeordnet, so läßt sich der Polynombereich $\mathsf{P}[x]$ in einer eindeutig bestimmbaren Weise wohlordnen. P ist in dieser Wohlordnung ein Abschnitt.*

Beweis. Wir definieren eine Anordnung der Polynome $f(x)$ aus $\mathsf{P}[x]$ folgendermaßen: Es sei $f(x) < g(x)$ in den folgenden Fällen:

1. Grad von $f(x) <$ Grad von $g(x)$;
2. Grad von $f(x) =$ Grad von $g(x) = n$, also

$$f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n, \quad g(x) = b_0 x^n + \cdots + b_n;$$

außerdem für einen Index k:

$$\begin{cases} a_i = b_i & \text{für} \quad i < k; \\ a_k < b_k & \text{in der Wohlordnung von } \mathsf{P}. \end{cases}$$

Dabei wird dem Polynom 0 ausnahmsweise der Grad 0 zugeschrieben. Daß so eine Anordnung erhalten wird, ist klar. Daß es eine Wohlordnung ist, zeigt man folgendermaßen: In jeder nichtleeren Menge von Polynomen liegt die nichtleere Untermenge der Polynome niedrigsten Grades; dieser Grad sei n. Darin liegt die nichtleere Untermenge der Polynome, deren a_0 in der Wohlordnung von P möglichst früh kommt; darin die Untermenge mit möglichst frühem a_1 usw. Die schließlich erhaltene Untermenge mit möglichst frühem a_n kann nur aus einem Polynom bestehen (da $a_0, \ldots, a_n$ durch die sukzessiven Minimalforderungen eindeutig bestimmt werden), und dieses Polynom ist das erste Element der gegebenen Menge.

Hilfssatz 3. *Ist ein Körper P wohlgeordnet und sind außerdem ein Polynom $f(x)$ vom Grad n und n Symbole $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vorgegeben, so läßt sich ein Körper $\mathsf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, in dem $f(x)$ vollständig in Linearfaktoren $\prod_1^n (x - \alpha_i)$ zerfällt, eindeutig konstruieren und wohlordnen. P ist in dieser Wohlordnung ein Abschnitt.*

Beweis. Wir wollen die Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sukzessive adjungieren, wodurch aus $\mathsf{P} = \mathsf{P}_0$ sukzessive die Körper $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n$ entstehen mögen. Nehmen wir an, daß $\mathsf{P}_{i-1} = \mathsf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ schon konstruiert und wohlgeordnet ist und daß P ein Abschnitt von P_{i-1} ist, so wird P_i folgendermaßen konstruiert:

Zunächst werde nach Hilfssatz 2 der Polynombereich $\mathsf{P}_{i-1}[x]$ wohlgeordnet. f zerfällt in diesem Bereich in irreduzible Faktoren, unter denen zunächst $x - \alpha_1, \ldots, x - \alpha_{i-1}$ vorkommen; von den übrigen Faktoren sei $f_i(x)$ der in der Wohlordnung dieses Bereiches erste. Mit α_i als Symbol für eine Wurzel von $f_i(x)$ definieren wir nun nach § 39 den Körper $\mathsf{P}_i = \mathsf{P}_{i-1}(\alpha_i)$ als Gesamtheit aller Summen

$$\sum_0^{h-1} c_\lambda \alpha_i{}^\lambda,$$

wo h der Grad von $f_i(x)$ ist. Sollte $f_i(x)$ linear sein, so ist natürlich $\mathsf{P}_i = \mathsf{P}_{i-1}$ zu setzen; das Symbol α_i bleibt dann unbenützt. Der Körper wird wohlgeordnet durch die folgende Festsetzung: Jedem Körperelement $\sum_0^{h-1} c_\lambda \alpha_i^\lambda$ wird ein Polynom $\sum_0^{h-1} c_\lambda x^\lambda$ zugeordnet, und die Körperelemente werden genau so angeordnet wie die ihnen entsprechenden Polynome.

Offenbar ist dann P_{i-1} ein Abschnitt von P_i, also auch P ein Abschnitt von P_i.

Damit sind $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_n$ konstruiert und wohlgeordnet. P_n ist der gesuchte eindeutig definierte Körper $\mathsf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Hilfssatz 4. *Wenn in einer geordneten Menge von Körpern jeder frühere Körper Unterkörper eines jeden späteren ist, so ist ihre Vereinigungsmenge wieder ein Körper.*

Beweis. Zu je zwei Elementen α, β der Vereinigung gibt es zwei Körper $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$, welche α und β enthalten und von denen einer den anderen umfaßt. In diesem umfassenden Körper sind $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ definiert, und diese Definitionen stimmen für alle Körper der Menge, welche α und β umfassen, überein, da ja von zwei solchen Körpern immer einer ein Unterkörper des anderen ist. Um nun z. B. das Assoziativgesetz

$$\alpha\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta\gamma$$

zu beweisen, suche man aus den Körpern $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_\gamma$ wieder den umfassendsten (spätesten); in ihm sind α, β und γ enthalten und in ihm gilt auch das Assoziativgesetz. In derselben Weise werden alle Rechnungsregeln bewiesen.

Der Beweis des Hauptsatzes zerfällt in zwei Teile: die Konstruktion von Ω und den Eindeutigkeitsbeweis. Die Konstruktion und der Beweis geschehen beide durch transfinite Induktion im Sinne von § 71.

Die Konstruktion von $\boldsymbol{\Omega}$. Hilfssatz 1 zeigt, daß man, um einen algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper Ω von P zu konstruieren, bloß einen solchen über P algebraischen Körper zu konstruieren hat, in welchem alle Polynome von $\mathsf{P}[x]$ vollständig zerfallen.

Man denke sich den Körper P und demnach auch den Polynombereich $\mathsf{P}[x]$ wohlgeordnet. Jedem Polynom $f(x)$ seien so viele neue Symbole $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zugeordnet, wie der Grad des Polynoms beträgt.

Jedem Polynom $f(x)$ sollen nunmehr zwei wohlgeordnete Körper P_f, Σ_f zugeordnet werden, und zwar werden diese definiert durch die folgenden rekursiven Relationen:

1. P_f ist die Vereinigungsmenge von P und allen Σ_g mit $g < f$.
2. Die Wohlordnung von P_f ist so beschaffen, daß P, sowie alle Σ_g mit $g < f$, Abschnitte von P_f sind.
3. Σ_f entsteht aus P_f durch Adjunktion aller Wurzeln von f mit Hilfe der Symbole $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nach der Konstruktion von Hilfssatz 3.

Zu beweisen ist, daß durch diese Forderungen in der Tat zwei wohlgeordnete Körper P_f, Σ_f eindeutig bestimmt werden, sobald alle früheren P_g, Σ_g gegeben sind und den Forderungen genügen.

Wenn 3. erfüllt ist, so ist zunächst P_f Abschnitt von Σ_f. Daraus und aus 2. folgt, daß P und jedes $\Sigma_g (g < f)$ Abschnitte von Σ_f sind.

Nimmt man an, daß die Forderungen für alle früheren Indizes als f bereits erfüllt sind, so ist also

$$\begin{cases} \mathsf{P} \text{ Abschnitt von } \Sigma_h \text{ für } h < f, \\ \Sigma_g \text{ Abschnitt von } \Sigma_h \text{ für } g < h < f. \end{cases}$$

Daraus folgt nun, daß die Körper P und $\Sigma_h (h < f)$ eine Menge von der in Hilfssatz 4 geforderten Art bilden. Also ist die Vereinigungsmenge wieder ein Körper, den wir der Forderung 1 entsprechend P_f zu nennen haben. Die Wohlordnung von P_f ist aber durch die Forderung 2 eindeutig bestimmt. Denn je zwei Elemente a, b von P_f liegen schon in einem der Körper P oder Σ_g und haben darin eine Reihenfolge: $a < b$ oder $a > b$, die in der Wohlordnung von P_f beibehalten werden muß. Diese Reihenfolge ist dieselbe in allen Körpern P oder Σ_g, welche sowohl a wie b umfassen; denn alle diese Körper sind ja Abschnitte voneinander. Also ist eine Ordnung in der Tat definiert. Daß es eine Wohlordnung ist, ist auch klar; denn jede nichtleere Menge $\mathfrak{M}$ in P_f enthält mindestens ein Element aus P oder aus einem Σ_g, also auch ein erstes Element aus P oder dem betreffenden Σ_g. Dieses ist dann zugleich das erste Element von $\mathfrak{M}$.

Also ist der Körper P_f samt seiner Wohlordnung durch 1., 2. eindeutig bestimmt. Da Σ_f durch 3. eindeutig bestimmt wird, so sind die P_f und Σ_f konstruiert.

In Σ_f zerfällt wegen 3. das Polynom $f(x)$ völlig in Linearfaktoren. Weiter zeigt man durch transfinite Induktion, daß Σ_f algebraisch in bezug auf P ist. Angenommen nämlich, alle $\Sigma_g (g < f)$ seien schon algebraisch. Dann ist auch ihre Vereinigungsmenge mit P, also P_f algebraisch. Weiter ist Σ_f nach 3. algebraisch in bezug auf P_f, also algebraisch in bezug auf P.

Bildet man nun die Vereinigung Ω aller Σ_f, so ist sie nach Hilfssatz 4 ein Körper; dieser Körper ist algebraisch in bezug auf P, und in ihm zerfallen alle Polynome f (weil jedes f schon in Σ_f zerfällt). Also ist der Körper Ω algebraisch-abgeschlossen (Hilfssatz 1).