WS 2001/02

Prof. U. Kirchgraber
Departement Mathmatik
ETH Zürich

Serie 5

1. a) Es geht um die *archimedische Spirale*

$$r(\varphi) = \frac{1}{\varphi} \quad \text{für } \varphi \in (0, \infty).$$

i) Erstellen Sie einen Plot der Kurve für $\varphi \in [0.3, 15]$.

ii) Was passiert für $\varphi \to \infty$?

iii) Können Sie begründen, dass $y = 1$ eine Asymptote der Kurve für $\varphi \to 0$ ist?
Tipp: Paramterdarstellung in der x, y-Ebene einführen.

b) Die sogenannte *Lemniskate* hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0\ , \quad a > 0 \text{ eine Zahl.}$$

i) Begründen Sie, dass die Lemniskate folgende Symmetrien hat

- achsensymmetrisch bezüglich der x-Achse
- achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse
- punktsymmetrisch bezüglich 0

Was bedeutet diese Einsicht, wenn es um das Zeichnen der Kurve geht?

ii) Begründen Sie, dass $r(\varphi) = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$ die Polardarstellung der Lemniskate ist.

iii) Benützen Sie das Resultat aus ii) um einen Plot der Lemniskate zu erzeugen.

c) Die sogenannte *Astroide* hat die Gleichung

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

i) Finden Sie eine Parameterdarstellung.
Tipp: Versuchen Sie den Ansatz $x = A(\cos\varphi)^k, y = A(\sin\varphi)^k$ und wählen A, k geeignet.

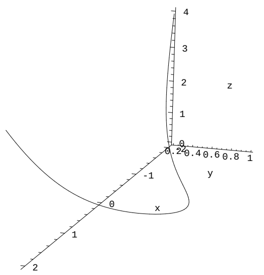
ii) Benutzen Sie das Resultat aus i), um einen Plot der Astroide zu erstellen.

Bitte wenden!

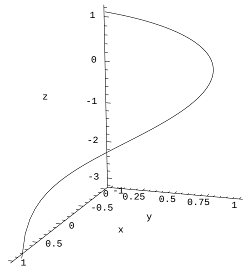
2. Bitte lösen Sie auch die folgende Aufgabe *ohne Computer*: Welche Vektorfunktion gehört zu welchem Bild? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

$$1)\begin{bmatrix}\cos(4t)\\ t\\ \sin(4t)\end{bmatrix}\quad 2)\begin{bmatrix}t^2-2\\ t^3\\ t^4+1\end{bmatrix}\quad 3)\begin{bmatrix}t\\ \frac{1}{1+t^2}\\ t^2\end{bmatrix}$$

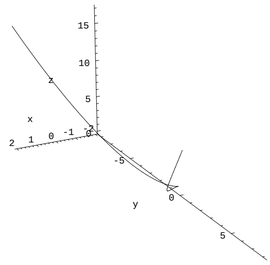
$$5)\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ \sin(5t)\end{bmatrix}\quad 6)\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ \ln(t)\end{bmatrix}$$



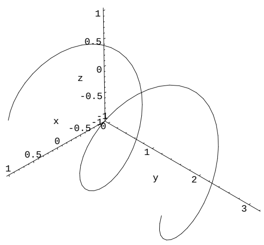
I



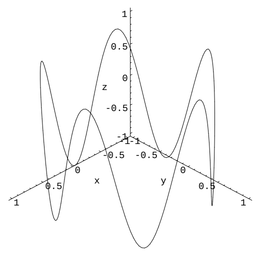
II



III



IV



V

3. Es wird ein Strömumgsfeld in der Ebene wie folgt definiert: Der Vektor $\underline{v}(\underline{x})$ der Strömung am Punkt P entsteht aus dem Ortsvektor $\underline{x}$ von P, indem man $\underline{x}$ um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn dreht.

a) Zeichnen Sie $\underline{v}$ für die 9 Gitterpunkte

$$\left(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}\right) \qquad i \in \{0,1,2\},\ j \in \{0,1,2\}$$

b) Finden Sie eine Formel für $\underline{v}(\underline{x})$.

c) Erzeugen Sie mit dem Mathematica-Befehl `PlotVectorField` ein anschauliches Bild des Vektorfeldes $\underline{v}$, für das Quadrat $D = [-2,2] \times [-2,2]$ in der x_1,x_2-Ebene (siehe Programm-Code am Schluss).

d) Denken Sie sich ein Teilchen am Punkt $(1,1)$ in die durch $\underline{v}$ erzeugte Strömung eingesetzt. Haben Sie eine Vermutung über die Bahn, der es folgen wird?

Siehe nächstes Blatt!

e) Nach Leonhard Euler (1707–1783) erhalten Sie eine Approximation für die in d) gesuchte Strömungslinie, indem Sie sukzessive die Punkte zu folgenden Ortsvektoren berechnen und einzeichnen:

$$\begin{aligned}\underline{x}_0 &= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\ \underline{x}_1 &= \underline{x}_0 + h\underline{v}(\underline{x}_0)\\ \underline{x}_2 &= \underline{x}_1 + h\underline{v}(\underline{x}_1)\end{aligned}$$

Dabei ist h eine kleine positive Zahl, der sogenannte *Schritt* (oder die *Schrittweite*). Die Approximation ist umso genauer, je kleiner der Schritt h gewählt wird.

Konstruieren Sie die Punkte zu $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ mit der Wahl $h = 0.25$.

f) Der zweite Teil des Mathematica-Programms zu dieser Aufgabe ermöglicht Ihnen, die Konstruktion aus e) mit dem Computer durchzuführen. Experimentieren Sie mit folgenden Daten und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen mit ein paar Sätzen.

Schritt	AnzahlSchritte
0.08	101
0.04	210
0.02	401
0.01	801
0.005	1601
0.0025	3201

g) (für Neugierige) Ändern Sie die Definition des Vektorfeldes $\underline{v}$ wie folgt ab: Statt um 90°, wird nur um 45°im Gegenuhrzeigersinn gedreht. Wählen Sie als Ausschnitt

$$D = [-15, 15] \times [-15, 15]$$

Mathematica-Programm zu den Teilen c), f), g):

```
Needs["Graphics‘PlotField‘"]
Clear[v, Plot1]
v[{x1_, x2_}] = {EINSETZEN,EINSETZEN }
Plot1 = PlotVectorField[v[{x1, x2}], {x1, -2, 2, 0.2},
{x2, -2,2, 0.2}, Frame -> True, AspectRatio -> Automatic]

Clear[Punkt0, Liste0, Schritt, AnzahlSchritte, Euler,
PunktA, ListeA, PunktB, ListeB, Plot2];
Punkt0 = {1, 1};
Liste0 = {Punkt0};
Schritt = EINSETZEN;
```

Bitte wenden!

```
AnzahlSchritte = EINSETZEN;
Euler[P_] = P + Schritt*v[P];
PunktA = Punkt0;
ListeA = Liste0;
i = 0;
While[i < AnzahlSchritte, i++;
  PunktB = Euler[PunktA];
  ListeB = Append[ListeA, PunktB];
  Clear[PunktA, ListeA];
  PunktA = PunktB;
  ListeA = ListeB;
  Clear[PunktB, ListeB]];
Plot2 = ListPlot[ListeA, PlotStyle -> PointSize[0.001],
AspectRatio -> Automatic];
Show[Plot1, Plot2]
```

Ausgabe in der Vorlesung vom 21. November 2001
Abgabe in den Übungsgruppen am Montag, den 3. Dezember