Ergänzung zur Vorlesung Analysis I
Zur Vollständigkeit

Vollständigkeit ist nicht ein anschaulicher Begriff.

Definition10. ***(Durchmesser)*** *Der Durchmesser einer Teilmenge $A \subset (X,d)$ ist definiert als*

$$\mathit{diam}\,(A) := \delta(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$$

(diam (A) kann ∞ sein).

Theorem 2. ***(Intervallschachtelung)*** *Für einen metrischen Raum (X,d) sind äquivalent:*
(i) (X,d) *ist vollständig.*
(ii) *Für jede Folge $A_j \subset X$ von nichtleeren Mengen mit*

(a) $A_j = \overline{A}_j$
(b) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_j \supset A_{j+1} \ldots$
(c) diam $(A) \to 0$, $j \to \infty$

folgt:

$$\bigcap_{j\geq 1} A_j = \{x\} \qquad \text{(genau ein Punkt } x \in X\text{).}$$

Die Voraussetzungen sind wichtig: z. Bsp. $X = \mathbb{R}$ ist vollständig aber:

a) $\bigcap_{n\geq 1} \underbrace{\left\{0 < x < \frac{1}{n}\right\}}_{A_n} = \emptyset$. Hier gilt $A_j \supset A_{n+1} \supset \ldots$, $\delta(A_n) = \frac{1}{n} \to 0$, aber die A_n sind nicht abgeschlossen.

b) $\bigcap_{n\geq 1} \underbrace{\{n \leq x\}}_{A_n} = \emptyset$. Hier gilt $A_n = \overline{A}_n$, $A_n \supset A_{n+1}$ für alle n, aber $\delta(A_n) = \infty$,

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Wähle $x_j \in A_j$, $j \geq 1$, definiere die Mengen

$$E_j = \{x_j, x_{j+1}, \ldots\}, \qquad j \geq 1.$$

Dann ist $E_j \subset A_j$ und deshalb $\delta(A_j) \to 0$. Daher ist $\{x_j\}_{j\geq 1}$ eine Cauchy Folge in X. Da nach Voraussetzung X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x = \lim x_j$ in X Nach Konstruktion ist $A_j \supset A_{j+1} \supset \ldots$, daher

$$x \in \overline{A}_j, \qquad \text{jedes } j \geq 1.$$

Aus $A_j = \overline{A}_j$ folgt $x \in A_j$ für jedes j, d. h. $x \in \bigcap_{j\geq 1} A_j$. Nehme an, auch $y \in \bigcap_{j\geq 1} A_j$. Dann ist $x, y \in A_j$, für jedes $j \geq 1$, daher

$$\begin{aligned} &0 \leq d(x,y) \leq \delta(A_j) \to 0 \quad (j \to 0) \\ &\Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei x_j eine Cauchy Folge in X. Zu zeigen: die Folge konvergiert. Es genügt zu zeigen, dass eine Teilfolge konvergiert. Definiere die abgeschlossenen Mengen

$$A_j := \overline{\{x_j, x_{j+1}, \ldots\}}, \quad j \geq 1.$$

Dann gilt $\delta(A_j) \to 0$, weil $\{x_j\}_{j\geq 1}$ eine Cauchy Folge ist. Überdies $A_j \supset A_{j+1}$ und $A_j = \overline{A}_j$. Daher gilt (a), (b), (c). Nach Voraussetzung existiert also ein $x \in X$ mit

$$x = \bigcap_{j\geq 1} A_j.$$

Weil $x \in A_j = \overline{\{x_j, x_{j+1} \ldots, \}}$ für alle j, so finden wir, nach Definition des Abschlusses, eine Teilfolge $\{x_{j_k}\}_{k\geq 1}$ mit

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{j_k} \quad \text{in } X.$$

Wir haben gezeigt, dass jede Cauchy Folge konvergiert. Daher ist (X,d) vollständig.

□