Ergänzung zur Vorlesung Analysis I
Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Minkowksi

Satz 1. ***(Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Minkowksi)***

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

Dann gilt:

$$1) \quad \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2) \quad \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis. 1) Kürze ab: $A := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $B := \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Falls $A = 0$ oder $B = 0$, so ist 1. richtig. Nehme an: $A > 0$, $B > 0$ und definiere für $1 \leq j \leq n$

$$\alpha_j := \frac{|x_j|}{A}, \qquad \beta_j := \frac{|y_j|}{B}.$$

Zu zeigen ist $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \leq 1$.
Benutze: $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ ($\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$).

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \leq \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2}_{=1} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2}_{=1} = 1.$$

2) folgt aus 1): Man kann annehmen $\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 > 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 &= \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) x_j + \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) y_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| |y_j| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

Dividiere beide Seiten durch $\left(\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. $\square$