8. November 2002

3. Einfache Beispiele

Satz 7.

1. $x \in \mathbb{R}$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$
2. $\alpha > 0$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$
3. $x > 0$, $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$
4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
5. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ *(später)*
7. $a > 0$, $x > 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} n^a \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)^n = 0^*$

---

*. $\lim_{n\to\infty} n^a = \infty$ polynomial, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n = 0$ exponentiell.

Beweis.

1. $|x| < 1$:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n} \qquad \text{alle } n.$$

$|x| > 1$: Wähle ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $N \le |x| < N+1$. Wähle $n > N$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{N}\cdot\underbrace{\frac{|x|}{N+1}}_{<1}\cdots\frac{|x|}{n}$$

$$< \frac{|x|^N}{N!}\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{|x|}{n} = \frac{|x|^{N+1}}{N!}\cdot\frac{1}{n} \qquad \text{alle } n > N,$$

also $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, da rechts eine Nullfolge steht (Satz 5).

2. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach *Archimedes* gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$N > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$$

Daher, für $n \ge N$,

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon^{\frac{1}{a}}$$

und deshalb

$$0 < \left(\frac{1}{n}\right)^a < \varepsilon, \qquad \text{alle } n \ge N.$$

3. $x \geq 1$: Dann

$$\sqrt[n]{x} \geq 1$$
$$y_n := \sqrt[n]{x} - 1 \geq 0$$

Bernoulli:

$$x = (1 + y_n)^n \geq 1 + n y_n$$

d. h.

$$0 \leq y_n \leq (x-1)\frac{1}{n}$$
$$y_n = \left|\sqrt[n]{x} - 1\right| \leq (x-1)\frac{1}{n}.$$

Daher:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

$0 < x < 1$: Dann $\frac{1}{x} > 1$

$$\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x}}} \to \infty. \qquad \text{(Satz 3)}$$

4.

$$y_n := (\sqrt[n]{n} - 1) \geq 0, \qquad n \geq 2.$$
$$(\sqrt[n]{n})^n = n = (1 + y_n)^n$$

Binomische Formel

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_n^k$$
$$\geq 1 + \binom{n}{2} y_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1} y_n^2$$
$$\Rightarrow \qquad (n-1) \geq n(n-1)\frac{1}{2} y_n^2$$
$$y_n^2 \leq \frac{2}{n}$$
$$y_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$$

d. h.

$$y_n = \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

rechts steht nun eine Nullfolge, nach Beispiel 2.

5. Sei K gegeben. Dann existiert nach 1. ein N, sodass

$$\frac{K^N}{n!} < 1 \qquad \text{alle } n \geq N$$
$$n! > K^n \qquad \text{alle } n \geq N$$
$$\sqrt[n]{n!} > K \qquad \text{alle } n \geq N.$$

Dies gilt für *jede Wahl* von K, also nach Definition, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

7. Zu zeigen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{(1+x)^n} = 0 \qquad a > 0, \quad y > 0$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > a$ dass folgt für $n > 2k > k$

$$n \geq n - k + 1 > \frac{n}{2} \qquad (n > 2k).$$

Mit der Binomische Formel folgt für $n > 2k$,

$$\begin{aligned}(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} x^k \\ &> \frac{n^k}{2^k} \cdot \frac{1}{k!} x^k.\end{aligned}$$

Daher

$$0 < \frac{n^a}{(1+x)^n} < \left(\frac{2^k \cdot k!}{x^k}\right) \cdot \frac{1}{n^{k-a}}, \qquad \text{falls } n > 2k.$$

Weil $k - a > 0$, steht rechts eine Nullfolge nach 2. Daher auch links nach Satz 5. $\square$