

Kap. XV Differentialgleichungen

1. Problemstellung, einfache Beispiele

Ein Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sie ordnet also jedem Punkt $x \in U$ den Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zu.

Definition Eine differenzierbare Kurve $\alpha : I \rightarrow U$, $t \mapsto \alpha(t) \in U$, definiert auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, heisst eine **Lösung** der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x),$$

(oder eine Integralkurve des Vektorfeldes), falls

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = f(\alpha(t)), \quad \text{alle } t \in I.$$

In jedem Zeitpunkt t stimmt also der Tangentialvektor $\dot{\alpha}(t)$ an die Kurve mit dem Vektor $f(\alpha(t))$ dort überein.

Falls $\alpha(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in I$, so heisst $\alpha(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit **Anfangsbedingung** $x_0 \in U$ zur Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$.

Beispiel Auf $U = \mathbb{R}^2$ sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert in $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Dieses Vektorfeld ist linear, $f(x) = Ax$, für die Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Halte $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ fest und definiere die Kurve $\varphi^t(x)$ durch

$$t \mapsto \varphi^t(x) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix},$$

dann ist $\alpha(t) := \varphi^t(x)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax$$

auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$ mit Anfangsbedingung $\alpha(0) = \varphi^0(x) = x$ zur Zeit $t = 0$.

Denn, erstens ist $\alpha(0) = \varphi^0(x) = \mathbf{1} \cdot x = x$, und zweitens ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi^t(x) &= \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= A\varphi^t(x) = f(\varphi^t(x)), \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies gilt für jede Anfangsbedingung $x \in \mathbb{R}^2$.

Anfangswertproblem A.W.P.

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Für vorgegebene $x \in U$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ sucht man eine Lösung $\alpha(t)$ der Gleichung $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangsbedingung x zur Zeit t_0 , d.h.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\alpha(t) &= f(\alpha(t)), \quad t \in I, \\ \alpha(t_0) &= x, \end{aligned}$$

auf einem Zeitintervall $I \subset \mathbb{R}$, welches t_0 enthält. **Man schreibt** dann für diese Lösung

$$\alpha(t) = \varphi_{t_0}^t(x),$$

oder einfacher

$$\alpha(t) = \varphi^t(x),$$

falls $t_0 = 0$ gewählt ist.

Fragen: Existiert für vorgegebene $x \in U$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung? Falls ja, ist sie eindeutig? Was ist das Intervall I , auf dem sie existiert? Falls die Lösung $\varphi^t(x)$ für jedes $x \in U$ existiert, ist dann, für festes $t \in \mathbb{R}$, die Abbildung $x \mapsto \varphi^t(x)$ von U nach U stetig, ist sie sogar differenzierbar?

Zunächst einige einfache Beispiele.

Einfache Beispiele in \mathbb{R} , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

1.
$$f(x) = \lambda x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\dot{x} = \lambda x)$$

Die Kurve $t \mapsto \varphi^t(x) := e^{\lambda t}x$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung des A.W.P.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x \\ x(0) &= x. \end{aligned}$$

Denn zur Zeit $t = 0$ haben wir $\varphi^0(x) = e^0 \cdot x = x$. Die Ableitung erfüllt $\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = \lambda e^{\lambda t}x = \lambda \varphi^t(x) = f(\varphi^t(x))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies gilt für jede vorgegebene Anfangsbedingung x . Die Eindeutigkeit wird später beantwortet.

2.
$$f(t, x) = a(t)x, \quad x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R},$$

mit einer stetigen Funktion $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dies ist jetzt ein zeitabhängiges Vektorfeld auf \mathbb{R} . Definiere für vorgegebene $x \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ die Kurve

$$t \longmapsto \varphi_s^t(x) := e^{A(t)}x, \quad A(t) := A(s, t) := \int_s^t a(\tau)d\tau,$$

dann ist $\varphi_s^t(x)$ die eindeutige Lösung des A.W.P.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(t)x & t \in \mathbb{R} \\ x(s) &= x & t = s. \end{aligned}$$

Denn für $t = s$ erhalten wir $\varphi_s^s(x) = e^{A(s)}x = e^0x = x$ und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_s^t(x) &= \left(\frac{d}{dt}A(t)\right) \cdot e^{A(t)}x \\ &= a(t)e^{A(t)}x = a(t)\varphi_s^t(x) = f(t, \varphi_s^t(x)) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies gilt für jede Anfangsbedingung $x \in \mathbb{R}$. Eindeutigkeit später.

3.
$$f(t, x) = a(t)x + b(t), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit zwei stetigen Funktionen a und b auf \mathbb{R} . Sei $x(t)$ eine Lösung des A.W.P.:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(t, x(t)) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(s) &= x, \quad t = s. \end{aligned}$$

Definiere $h(t) := e^{-A(t)}x(t)$, mit $A(t) := \int_s^t a(\tau)d\tau$. Dann folgt

$$\dot{h}(t) = e^{-A(t)}[\dot{x}(t) - a(t)x(t)] = e^{-A(t)}b(t).$$

Weil $h(s) = e^{-A(s)}x(s) = e^0x(s) = x$, erhalten wir durch Integration, mit Hilfe des Hauptsatzes:

$$h(t) - x = \int_s^t \dot{h}(\tau)d\tau = \int_s^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau.$$

Für die Lösung $x(t) = \varphi_s^t(x) = e^{A(t)}h(t)$ folgt die Darstellungsformel

$$\begin{aligned} \varphi_s^t(x) &= e^{A(t)}x + e^{A(t)} \int_s^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau, \\ A(t) &= \int_s^t a(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Dies ist die Lösungsformel des A.W.P. mit Anfangsbedingung $\varphi_s^s(x) = x$ zur Zeit $t = s$.

4.
$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Lösung des A.W.P.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= x \end{aligned}$$

ist gegeben durch

$$\varphi^t(x) = \frac{x}{1 - tx},$$

denn $\varphi^0(x) = x$, und

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = \left(\frac{x}{1 - tx}\right)^2 = f(\varphi^t(x)).$$

Falls $x = 0$, so existiert die Lösung $\varphi^t(0) = 0$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$. Falls $x > 0$, so folgt

$$\lim_{t \uparrow \frac{1}{x}} \varphi^t(x) = +\infty.$$

Die Lösung ist schon in **endlicher** Zeit am Rande des Phasenraumes! Die Lösung existiert nur auf dem offenen Intervall

$$I_x = \left(-\infty, \frac{1}{x}\right),$$

und **nicht auf** ganz \mathbb{R} . Die Lösung für ein nichtlineares Vektorfeld braucht also nicht auf ganz \mathbb{R} zu existieren.

5.
$$f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das A.W.P.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= |x|^{\frac{1}{2}} = f(x) \\ x(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

hat eine Lösung $x(t) \equiv 0$ weil $f(0) = 0$. Es gibt aber noch eine andere Lösung, nämlich

$$x(t) := \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ \left(\frac{t-t_0}{2}\right)^2, & t \geq t_0, \end{cases}$$

wie man sofort verifiziert. Die Lösung des A.W.P. mit Anfangsbedingung $x = 0$ ist also **nicht eindeutig**. Das Vektorfeld in der Umgebung von $x = 0$ ist nicht Lipschitz-stetig.

2. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des A.W.P.

Wir betrachten ein stetiges, zeitabhängiges Vektorfeld auf \mathbb{R}^n , d.h. eine stetige Abbildung

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \longmapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^n.$$

Wir wählen

$$(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

und definieren für positive Zahlen $b > 0$ und $r > 0$ die abgeschlossenen Kugeln in \mathbb{R} resp. \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \overline{I}_b(t_0) &:= \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq b\} \subset \mathbb{R} \\ \overline{B}_r(x_0) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit lokaler Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist durch den folgenden Satz garantiert. (Die lokalen Lösungen werden später zu maximalen Lösungen fortgesetzt.)

Theorem 1 (Cauchy, Lindelöf, Picard)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Nehme an, f ist in einer Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ **Lipschitz-stetig** in $x \in \mathbb{R}^n$, das heisst es gibt Konstanten $L \geq 0$, $b > 0$ und $r > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &\leq L\|x - y\|, \\ (t, x), (t, y) &\in \overline{I}_b(t_0) \times \overline{B}_{2r}(x_0) =: Q. \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned} A &:= \max_Q \|f(t, x)\| \\ \tau &:= \min \left\{ b, \frac{2}{3} \frac{r}{A}, \frac{1}{3} \frac{1}{L} \right\}. \end{aligned}$$

Dann existiert zu vorgegebenen $x \in \overline{B}_r(x_0)$ und $s \in \overline{I}_{\tau/2}(t_0)$ **genau eine stetig differenzierbare Kurve** $t \mapsto \varphi_s^t(x) \in \overline{B}_{2r}(x_0)$ für $t \in \overline{I}_\tau(t_0)$ mit den beiden Eigenschaften:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_s^t(x) = f(t, \varphi_s^t(x)), & t \in \overline{I}_\tau(t_0) \\ \varphi_s^s(x) = x, & t = s. \end{cases}$$

Die Abbildung $\overline{I}_\tau(t_0) \times \overline{I}_{\tau/2}(t_0) \times \overline{B}_r(x_0) \longrightarrow \overline{B}_{2r}(x_0)$

$$(t, s, x) \longmapsto \varphi_s^t(x)$$

heisst der **lokale Fluss des zeitabhängigen Vektorfeldes** f . Er ist stetig, und in x Lipschitz-stetig:

$$\|\varphi_s^t(x) - \varphi_s^t(y)\| \leq 2\|x - y\|.$$

Beweis: (Kontraktionsprinzip)

Genau wie in Kap. XI vorgehend, suchen wir anstatt einer stetig differenzierbaren Kurve $t \mapsto \varphi_s^t(x) \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\frac{d}{dt} \varphi_s^t(x) = f(t, \varphi_s^t(x))$$

$$\varphi_s^s(x) = x,$$

äquivalenterweise eine nur stetige Kurve $t \mapsto \varphi_s^t(x) \in \mathbb{R}^n$, mit

$$\varphi_s^t(x) = x + \int_s^t f(\sigma, \varphi_s^\sigma(x)) d\sigma,$$

so dass wir eine Integralgleichung für stetige Funktionen zu lösen haben. Wir definieren den metrischen Raum M der Kandidaten als die Menge

$$M := \{ \alpha : \overline{I_\tau}(t_0) \times \overline{I_{\tau/2}}(t_0) \times \overline{B_r}(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \\ \alpha \text{ stetig und } \alpha(t, s, x) \in \overline{B_{2r}}(x_0) \}.$$

Die Metrik auf M ist induziert durch die Sup-Norm

$$\|\alpha\| := \sup_{(t,s,x)} \|\alpha(t, s, x)\|, \quad \alpha \in M.$$

M ist eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes

$$C(\overline{I_\tau}(t_0) \times \overline{I_{\tau/2}}(t_0) \times \overline{B_r}(x_0), \mathbb{R}^n)$$

der stetigen Funktionen. Deshalb ist M vollständig. Wir suchen ein $\alpha \in M$, welches die Integralgleichung

$$\alpha(t, s, x) = x + \int_s^t f(\sigma, \alpha(\sigma, s, x)) d\sigma$$

löst. Definieren wir die Abbildung $T : M \rightarrow C(\overline{I_\tau} \times \overline{I_{\tau/2}} \times \overline{B_r}, \mathbb{R}^n)$ durch

$$T(\alpha)(t, s, x) := x + \int_s^t f(\sigma, \alpha(\sigma, s, x)) d\sigma,$$

so ist ein Fixpunkt, $T(\alpha) = \alpha$, in M gesucht. Nach dem Kontraktionsprinzip in Kap. XI hat T **genau einen** Fixpunkt in M , weil

$$(i) \quad T : M \longrightarrow M$$

$$(ii) \quad \|T(\alpha) - T(\beta)\| \leq \frac{1}{2} \|\alpha - \beta\|$$

für alle $\alpha, \beta \in M$.

Beweis von (i) Sei $\alpha \in M$ und sei $A > 0$ und $\tau > 0$ wie im Theorem. Dann kann man abschätzen, für $t \geq s$,

$$\begin{aligned}
\|T(\alpha)(t, s, x) - x_0\| &\leq \|x - x_0\| + \left\| \int_s^t f(\sigma, \alpha(\sigma, s, x)) d\sigma \right\| \\
&\leq \|x - x_0\| + \int_s^t \|f(\sigma, \alpha(\sigma, s, x))\| d\sigma \\
&\leq r + |t - s| \cdot A \\
&= r + |(t - t_0) + (t_0 - s)| \cdot A \\
&\leq r + \left(\tau + \frac{\tau}{2}\right) \cdot A \leq r + r = 2r,
\end{aligned}$$

wobei wir $|t - t_0| \leq \tau$ und $|s - t_0| \leq \frac{1}{2}\tau$ und die Definition von τ benützt haben. Es ist also $T(\alpha)(t, s, x) \in \overline{B_{2r}}(x_0)$ und weil $T(\alpha)$ stetig ist, so gehört $T(\alpha)$ zu M .

Beweis von (ii) Wir benützen jetzt die Lipschitz-Stetigkeit des gegebenen Vektorfeldes f . Für $\alpha, \beta \in M$ können wir abschätzen, für $t \geq s$:

$$\begin{aligned}
&\|T(\alpha)(t, s, x) - T(\beta)(t, s, x)\| \\
&\leq \int_s^t \|f(\sigma, \alpha(\sigma, s, x)) - f(\sigma, \beta(\sigma, s, x))\| d\sigma \\
&\leq \int_s^t L \|\alpha(\sigma, s, x) - \beta(\sigma, s, x)\| d\sigma \\
&\leq \int_s^t L \cdot \sup \|\alpha(\sigma, s, x) - \beta(\sigma, s, x)\| d\sigma \\
&= \int_s^t L \|\alpha - \beta\| d\sigma \\
&= |t - s| \cdot L \|\alpha - \beta\| \\
&\leq \frac{3}{2}\tau \cdot L \|\alpha - \beta\| \leq \frac{1}{2} \|\alpha - \beta\|.
\end{aligned}$$

Nehme links das Supremum über (t, s, x) , und die Kontraktionseigenschaft (ii) ist bewiesen. Der eindeutige Fixpunkt α von T ist die gesuchte eindeutige Lösung

$$\alpha(t, s, x) =: \varphi_s^t(x)$$

des A.W.P. auf dem Intervall $t \in \overline{I_\tau}(t_0) = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ mit Anfangsbedingung $x = \varphi_s^s(x)$ zur Zeit $t = s$. Wir verifizieren schliesslich, dass der Fixpunkt $\alpha \in M$

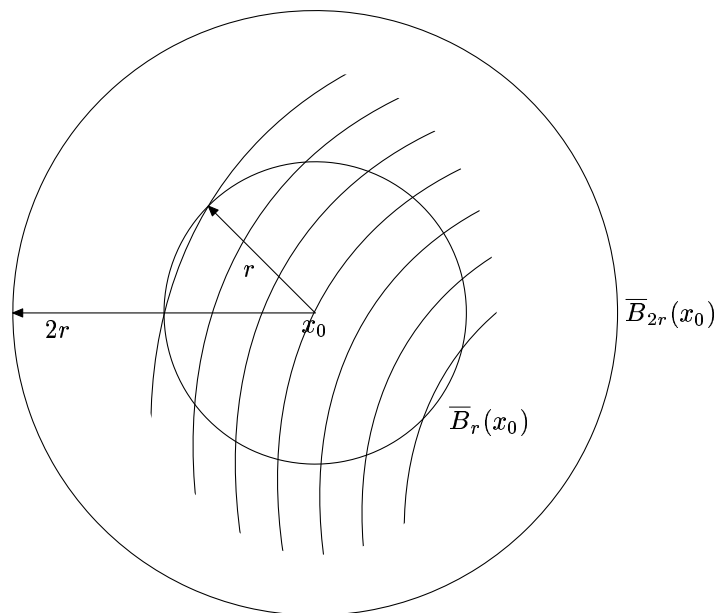
von T Lipschitz-stetig in x ist. Wie oben schätzt man ab:

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, s, x) - \alpha(t, s, y)\| &= \|T(\alpha)(t, s, x) - T(\alpha)(t, s, y)\| \\ &\leq \|x - y\| + \frac{1}{2} \sup_{s,t} \|\alpha(t, s, x) - \alpha(t, s, y)\|. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\sup_{(s,t)} \|\alpha(t, s, x) - \alpha(t, s, y)\| \leq 2\|x - y\|,$$

und damit die gesuchte Abschätzung im Theorem.



$$t^+(t_0, x) < \infty$$

■

Aus Kapitel XI erinnern wir uns, dass der eindeutige Fixpunkt einer Kontraktionsabbildung durch ein Iterationsverfahren **konstruiert** wird. In unserem Fall zum Beispiel definieren wir die Folge

$$\begin{aligned} \alpha^0(t, s, x) &\equiv x \in \overline{B}_r(x_0) \\ \alpha^{(n)}(t, s, x) &:= T(\alpha^{(n-1)})(t, s, x) \\ &= x + \int_s^t f(\sigma, \alpha^{(n-1)}(\sigma, s, x)) d\sigma, \end{aligned}$$

$n \geq 1$. Die Folge $\alpha^{(n)}(t, s, x)$ konvergiert insbesondere gleichmässig in $t \in \overline{I}_r(t_0)$ gegen die Lösungskurve $t \mapsto \varphi_s^t(x)$, falls wir (s, x) festhalten.

Bemerkungen

B.1. Wann ist ein Vektorfeld Lipschitz-stetig?

Sei $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, stetig und in der Variablen $x \in U$ partiell stetig differenzierbar, d.h. $(t, x) \mapsto D_2 f(t, x)$ ist stetig. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig in x , in jedem Punkt von $\mathbb{R} \times U$. Dies folgt aus dem Mittelwertsatz: Sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$. Dann wählen wir $b > 0$ und $r > 0$ so, dass $Q := \overline{I}_b(t_0) \times \overline{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R} \times U$. Es folgt

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \max_{(\tau, \xi) \in Q} \|D_2 f(\tau, \xi)\| \|x - y\|$$

für alle $(t, x), (t, y) \in Q$.

Sei $f(t, x) = A(t)x$ ein zeitabhängiges, lineares Vektorfeld auf \mathbb{R}^n mit $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $t \mapsto A(t)$ stetig. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig, denn

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &= \|A(t)(x - y)\| \\ &\leq \|A(t)\| \|x - y\| \\ &\leq L \|x - y\|, \end{aligned}$$

mit $L := \max_{t \in \overline{I}} \|A(t)\|$, für alle (t, x) und $(t, y) \in \overline{I} \times \mathbb{R}^n$. Dies gilt für jedes abgeschlossene und beschränkte Intervall $\overline{I} \subset \mathbb{R}$.

B.2. Die Differenzierbarkeitseigenschaften des Vektorfeldes f

übertragen sich auf die Flussabbildung

$$\varphi : (t, s, x) \mapsto \varphi_s^t(x)$$

von f . Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Falls das Vektorfeld $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mal stetig differenzierbar ist, dann ist auch der Fluss auf seinem Definitionsbereich k -mal stetig differenzierbar. Halten wir (t, s) fest, so ist insbesondere die Abbildung

$$x \mapsto \varphi_s^t(x)$$

auf ihrem Definitionsbereich in U aus C^k . Diese Abbildung ordnet der Anfangsbedingung $x \in U$ zur Zeit $t = s$ den Ort der Lösung zur Zeit t zu.

Literatur: H. Amann: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Walter de Gruyter-Verlag 1983.

3. Fortsetzung von Lösungen

Wir betrachten jetzt ein stetiges Vektorfeld $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, welches lokal Lipschitz–stetig auf ganz U ist, d.h. jeder Punkt in $\mathbb{R} \times U$ besitzt eine kompakte Umgebung wie in Theorem 1 beschrieben, auf der eine Lipschitz–Abschätzung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

gilt für eine Konstante $L \geq 0$. Für solche Vektorfelder kann jede Lösung zu einer “maximalen” Lösung fortgesetzt werden. Sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$. Nach Theorem 1 existiert genau eine lokale Lösung $t \mapsto \varphi_{t_0}^t(x_0)$ der Differentialgleichung durch den Punkt x_0 zur Zeit t_0 . Diese Lösung existiert zunächst auf einem kleinen Intervall, nämlich für $t \in \bar{I}_{\tau_0}(t_0) = [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ für ein $\tau_0 > 0$. Folgen wir der Lösung bis zum rechten Endpunkt $t_1 := t_0 + \tau_0$, so erhalten wir $x_1 = \varphi_{t_0}^{t_1}(x_0) \in U$. Im Punkt (t_1, x_1) können wir wieder den lokalen Existenz– und Eindeigkeitssatz (Theorem 1) anwenden, und so unsere Lösung fortsetzen durch

$$\varphi_{t_0}^t(x_0) := \varphi_{t_1}^t(x_1) = \varphi_{t_1}^t(\varphi_{t_0}^{t_1}(x_0)) ,$$

für $t \in \bar{I}_{\tau_1}(t_1)$, mit einem $\tau_1 > 0$. Auf diese Weise fortfahrend, erhalten wir ein maximales Zeitintervall $I(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}$, auf dem die Lösung $\varphi_{t_0}^t(x_0)$ mit der Anfangsbedingung x_0 zur Zeit t_0 existiert. Das offene Intervall $I(t_0, x_0)$ ist die Vereinigung aller abgeschlossenen Zeitintervalle, auf denen die Lösung mit Anfangsbedingung x_0 zur Zeit t_0 existiert. Man bezeichnet es häufig mit

$$I(t_0, x_0) = (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0)) \subset \mathbb{R}$$

mit der sogenannten Eintrittszeit $t^-(t_0, x_0)$ und der Austrittszeit $t^+(t_0, x_0)$, definiert durch

$$t^+(t_0, x_0) := \sup \{s > t_0 \mid \text{das A.W.P. } \dot{x} = f(t, x) \text{ mit } x(t_0) = x_0 \\ \text{hat eine Lösung auf dem Zeitintervall } [t_0, s]\} ,$$

und analog für $t^-(t_0, x_0)$.

Beispiel Für das nichtlineare Vektorfeld $f(x) = x^2$ auf \mathbb{R} kennen wir die Lösung des A.W.P. explizit:

$$t \mapsto \varphi^t(x) = \frac{x}{1 - tx}, \quad \varphi^0(x) = x ,$$

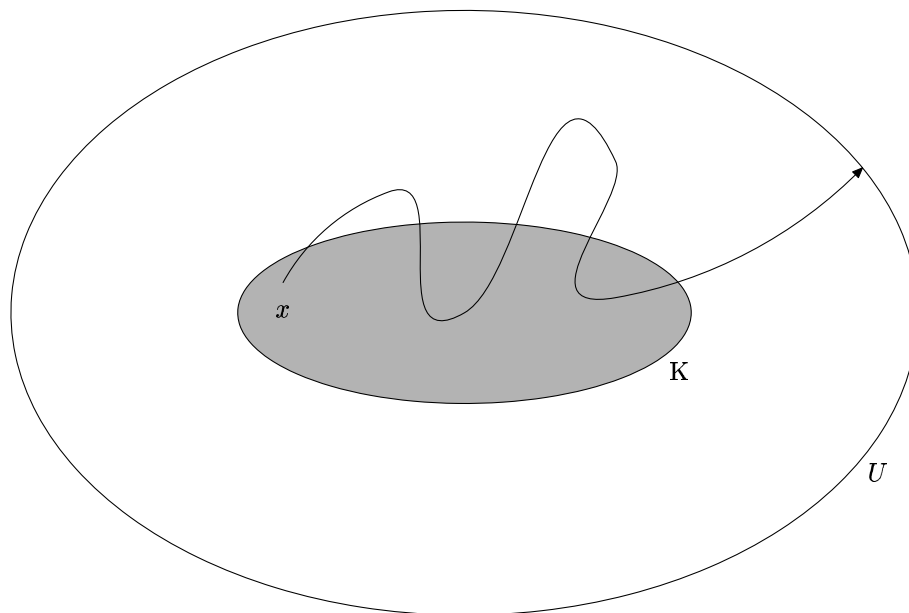
wobei wir $t_0 = 0$ gewählt haben. Für die Anfangsbedingung $x = 0$ ist $t^-(0, 0) = -\infty$ und $t^+(0, 0) = +\infty$.

Für $x > 0$ lesen wir ab: $I(0, x) = (t^-(0, x), t^+(0, x)) = (-\infty, \frac{1}{x})$. Die Lösung ist in endlicher Zeit am Rand des Raumes. Dieses Beispiel ist typisch für das Verhalten der Lösung im Falle $t^+(t_0, x) < \infty$, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 1 Das Vektorfeld $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei stetig und lokal Lipschitz-stetig auf U . Falls die Austrittszeit der Lösung $\varphi_{t_0}^t(x)$ endlich ist, das heisst falls $t^+(t_0, x) =: t^+ < \infty$ ist, so existiert für jede kompakte Menge K mit $x \in K \subset U$ ein Zeitpunkt τ_K in $t_0 < \tau_K < t^+$, so dass

$$\varphi_{t_0}^t(x) \notin K \quad \text{für } \tau_K < t < t^+.$$

Die Lösung verlässt jede kompakte Menge in U !



$$t^+(t_0, x) < \infty$$

Beweis (Theorem 1)

Falls nicht, so existiert eine kompakte Menge K mit $x \in K \subset U$ und eine Folge $t_n \uparrow t^+$, so dass

$$\varphi_{t_0}^{t_n}(x) \in K, \quad \text{alle } n.$$

Wegen der Kompaktheit von K konvergiert eine Teilfolge (die wir wieder wie die ursprüngliche Folge bezeichnen)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_0}^{t_n}(x) = x^* \in K.$$

Wenden wir Theorem 1 auf eine abgeschlossene Umgebung von $(t^+, x^*) \subset \mathbb{R} \times U$ an, so können wir, falls wir n gross genug wählen, die Lösung fortsetzen durch

$$\varphi_{t_0}^t(x_0) := \varphi_{t_n}^t(\varphi_{t_0}^{t_n}(x)), \quad t \in I_{\tau^*}(t^+)$$

für ein $\tau^* > 0$. Wählen wir n hinreichend gross, so existiert also die Lösung für $t = t_n + \tau^* > t^+$, im Widerspruch zur Definition von $t^+ = t^+(t_0, x)$. ■

Folgerung

Satz 2 Sei $x(t) = \varphi_{t_0}^t(x_0)$ eine Lösung des Vektorfeldes f wie in Satz 1. Nehme an, es gibt eine kompakte Menge $K \subset U$, so dass

$$x(t) \in K \quad \text{für alle } t \in I(t_0, x_0).$$

Dann ist $I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$, das heisst $t^- = -\infty$ und $t^+ = +\infty$.

Illustration

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, das nichtlineare Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + (x^2 + y^2) & y \\ x & - (x^2 + y^2) & x \end{pmatrix},$$

dann existiert jede Lösung für alle Zeiten! Denn, sei $(x(t), y(t))$ eine Lösung, welche im Punkt $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ startet. Dann folgt durch Differenzieren und Einsetzen der Lösung

$$\frac{d}{dt} [x(t)^2 + y(t)^2] = 2[x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)] = 0,$$

für alle $t \in I := I(0, x(0), y(0))$. Daher ist $x(t)^2 + y(t)^2 = x(0)^2 + y(0)^2$ konstant. Die Lösung bleibt also in der kompakten Menge

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = x(0)^2 + y(0)^2\},$$

daher $I = \mathbb{R}$, nach Satz 2.

Definition (Integral eines Vektorfeldes) Eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst ein "Integral" oder ein Erhaltungssatz des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge U , falls

1. $dF(x) \neq 0$, $x \in U$
2. $dF(x)[f(x)] = 0$, $x \in U$.

Im Beispiel oben ist die Funktion

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

ein Integral des Vektorfeldes f auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Geometrisch ist das Vektorfeld f tangential an die Niveauflächen

$$N_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = c\}$$

des Integrals F . Wie wir zeigen werden, folgt, dass die Niveauflächen von F invariant sind unter den Flussabbildungen φ^t von f .

Notation, Fluss eines zeitunabhängigen Vektorfeldes

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein (zeitunabhängiges) Vektorfeld, so bezeichnet man seinen Fluss häufig mit φ^t . Er ist definiert durch die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi^t(x) &= f(\varphi^t(x)) \quad , \quad t \in I(0, x) \\ \varphi^0(x) &= x, \quad t = 0,\end{aligned}$$

das heisst für $x \in \mathbb{R}^n$ fest ist die Kurve $t \mapsto x(t) := \varphi^t(x)$ für $t \in I(0, x)$ die eindeutige und maximale Lösung mit Anfangsbedingung x zur Zeit $t = 0$, während für festes t die Abbildung $x \mapsto \varphi^t(x)$ der Anfangsbedingung $x \in \mathbb{R}^n$, den Ort der Lösung zur Zeit t zuordnet.

Satz 3 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und zeit-unabhängig mit Fluss φ^t . Dann ist die C^1 -Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Integral von f genau dann, falls $dF(x) \neq 0$, und

$$F(\varphi^t(x)) = F(x) \quad \text{alle } t \in I(0, x),$$

für alle x . Die Funktion F ist also längs jeder Lösung konstant

Beweis: (Kettenregel)

Halte x fest. Dann folgt aus $F(\varphi^t(x)) = F(x)$ für alle t mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}F(\varphi^t(x)) = dF(\varphi^t(x)) \left[\frac{d}{dt}\varphi^t(x) \right] \\ &= dF(\varphi^t(x)) [f(\varphi^t(x))] .\end{aligned}$$

Weil $\varphi^0(x) = x$ für $t = 0$, so erhalten wir $dF(x)[f(x)] = 0$. Die Umkehrung wird genau gleich bewiesen. ■

Integrale reduzieren so die “Anzahl der Freiheitsgrade” und zeigen insbesondere, wo die Integralkurven des Vektorfeldes f geometrisch liegen: Lösungen durch Punkte $x \in N_c$ bleiben in N_c für alle $t \in I(0, x)$. Eine Folgerung aus der Eindeutigkeit der Lösungen eines zeitunabhängigen Vektorfeldes ist der folgende Satz.

Satz 4 Der Fluss φ^t eines lokal Lipschitz-stetigen (zeitunabhängigen) Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat die Eigenschaft:

$$\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x) = \varphi^s(\varphi^t(x))$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ in den Definitionsbereichen der Lösungen.

Beweis: (Eindeutigkeit)

Definiere, für $x \in \mathbb{R}^n$ und $s \in \mathbb{R}$ festgehalten, die zwei Kurven in \mathbb{R}^n

1. $t \mapsto x(t) = \varphi^t(\varphi^s(x))$,
2. $t \mapsto y(t) = \varphi^{t+s}(x)$.

Wir zeigen, dass beide Kurven dasselbe Anfangswertproblem, nämlich

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= \varphi^s(x) \quad , \quad t = 0 \end{aligned}$$

lösen. Aus der Eindeutigkeit der Lösungen (Theorem 1) folgt daher $x(t) = y(t)$ für alle $t \in I(0, \varphi^s(x))$.

1 : Nach Definition des Flusses gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\frac{d}{dt} \varphi^t \right) (\varphi^s(x)) = f(\varphi^t(\varphi^s(x))) \\ &= f(x(t)) \quad \text{auf dem Intervall } t \in I(0, \varphi^s(x)). \end{aligned}$$

Überdies, $x(0) = \varphi^0(\varphi^s(x)) = \varphi^s(x)$.

2 : $y(0) = \varphi^s(x)$, und

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt} \varphi^{t+s}(x) = \frac{d}{d\tau} \varphi^\tau(x) \Big|_{\tau=s+t} \\ &= f(\varphi^\tau(x)) \Big|_{\tau=s+t} = f(\varphi^{t+s}(x)) \\ &= f(y(t)) . \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Folgerungen: Eigenschaften des Flusses und 1-parametrische Gruppen von Abbildungen

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges (zeitunabhängiges) Vektorfeld. Nehme (der Einfachheit halber) an, dass der Fluss $\varphi^t(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert, für jede Anfangsbedingung $x \in \mathbb{R}^n$. **Nach Definition** gilt also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi^t(x) &= f(\varphi^t(x)), \quad t \in \mathbb{R} \\ \varphi^0(x) &= x \quad t = 0. \end{aligned}$$

Dann erzeugt der Fluss, für jedes feste $t \in \mathbb{R}$, die Abbildung

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = \varphi^0(x) \longmapsto \varphi^t(x).$$

Die Abbildung ordnet also jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den Ort der Lösung $\varphi^t(x)$ zu, welche zur Zeit $t = 0$ in x startet. Diese Abbildungen sind (lokal) Lipschitz-stetig (Theorem 1). Es gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$:

- (i) $\varphi^0 = id$

$$(ii) \quad \varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s} = \varphi^s \circ \varphi^t$$

$$(iii) \quad (\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}.$$

Die Eigenschaft $\varphi^0 = id$ ist die Anfangsbedingung $\varphi^0(x) = x$ des Flusses. (ii) folgt aus der Eindeutigkeit (Satz 4). Die Eigenschaft (iii) folgt aus (i) und (ii): Es gilt, für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$:

$$(\varphi^t \circ \varphi^{-t})(x) = \varphi^{t-t}(x) = \varphi^0(x) = x.$$

Die inversen Abbildungen $(\varphi^t)^{-1}$ sind daher auch Lipschitz-stetig. Wir erhalten also eine 1-parametrische Gruppe $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ von bijektiven, lokal Lipschitz-stetigen Abbildungen $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Bemerkung

Falls $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, so erhält man eine 1-parametrische Gruppe φ^t , $t \in \mathbb{R}$ von C^k -Diffeomorphismen von \mathbb{R}^n auf \mathbb{R}^n . Dies ist eine bequeme Art, Diffeomorphismen von \mathbb{R}^n zu erzeugen: man lässt die Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ durch den Fluss eines Vektorfeldes fließen. Falls der Fluss nicht für alle Zeiten existiert, so erhält man entsprechend lokale Diffeomorphismen.

4. Die Gronwall'sche Ungleichung

Technisch nützlich für Abschätzungen von Lösungen von Differentialgleichungen ist die folgende Ungleichung.

Lemma von Gronwall Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall I mit $u \geq 0$. Für ein t_0 und alle $t \in I$ erfülle u die Integralungleichung

$$u(t) \leq A + B \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|$$

mit zwei Konstanten $A, B \geq 0$. Dann folgt für alle $t \in I$

$$u(t) \leq Ae^{B \cdot |t-t_0|}.$$

Beweis

Wir können $B > 0$ annehmen, betrachten den Fall $t \geq t_0$, und kürzen ab

$$y(t) := B \int_{t_0}^t u(s) ds.$$

Aus den Voraussetzungen folgt

$$\dot{y}(t) - By(t) = B(u(t) - y(t)) \leq AB.$$

Für

$$z(t) := y(t) \cdot e^{-B(t-t_0)}$$

folgt somit

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (\dot{y}(t) - By(t))e^{-B(t-t_0)} \\ &\leq AB e^{-B(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Integration von t_0 bis t führt, mit $z(t_0) = 0$ (wegen $y(t_0) = 0$), zu

$$z(t) \leq AB \int_{t_0}^t e^{-B(s-t_0)} ds,$$

und

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t)e^{B(t-t_0)} \\ &\leq AB \int_{t_0}^t e^{-B(s-t_0)} ds \cdot e^{B(t-t_0)} \\ &= -A + Ae^{B(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung $u(t) \leq A + y(t)$, folgt daher $u(t) \leq Ae^{B(t-t_0)}$, wie im Lemma behauptet. ■

Zwei Folgerungen:

Satz 5 (Eindeutigkeit) Sei $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

auf $\mathbb{R} \times U$. Seien $x(t)$ und $y(t)$ zwei Lösungen auf dem Intervall I . Falls $x(t_0) = y(t_0)$, dann ist

$$x(t) = y(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis (Gronwall)

Für $u(t) := x(t) - y(t)$ folgt aus den Integralgleichungen für die beiden Lösungen:

$$u(t) = \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds.$$

Mit der Lipschitz–Stetigkeit erhalten wir

$$\|u(t)\| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds \right|$$

und aus Gronwall (mit $A = 0$) folgt $\|u(t)\| \leq 0$, also $\|u(t)\| = 0$ und daher $u(t) = 0$ für alle $t \in I$. ■

Satz 6 Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz–stetig in \mathbb{R}^n . Nehme an

$$\|f(t, x)\| \leq a(t) + b(t)\|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit zwei stetigen, positiven Funktionen a und b auf \mathbb{R} . Dann existiert jede Lösung $\varphi_{t_0}^t(x)$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$.

Beweis (Gronwall)

Widerspruch: Nehme an $t^+(t_0, x) < \infty$. Dann ist, nach Satz 2, die Lösung $x(t) := \varphi_{t_0}^t(x)$ auf $[t_0, t^+)$ nicht beschränkt. Andererseits folgt aus

$$x(t) = x + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

für $t_0 \leq t < t^+$ die Abschätzung

$$\|x(t)\| \leq \|x\| + \int_{t_0}^t a(s) ds + \int_{t_0}^t b(s)\|x(s)\| ds.$$

Mit $I^+ := [t_0, t^+]$ ist die rechte Seite

$$\leq \|x\| + t^+ \max_{s \in I^+} a(s) + \max_{s \in I^+} b(s) \cdot \int_{t_0}^t \|x(s)\| ds.$$

Mit Hilfe von Gronwall schliessen wird, dass $\|x(t)\|$ auf dem Intervall $[t_0, t^+)$ beschränkt ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass $t^+(t_0, x) = \infty$ sein muss. ■

5. Transformation eines Vektorfeldes

Anstatt sofort lösen zu versuchen, empfiehlt es sich häufig, das Vektorfeld zunächst in eine einfachere Form zu **transformieren**, von der man erhofft, die Lösungen einfach abzulesen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ das lokal Lipschitz-stetige Vektorfeld. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und

$$u : V \longrightarrow U, \quad x = u(y)$$

ein Diffeomorphismus aus der Klasse C^k , $k \geq 1$. Sei $x(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ in U , sie erfüllt

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Die zur Kurve $x(t)$ in U transformierte Kurve $y(t)$ in V ist definiert durch

$$x(t) = u(y(t)) \iff y(t) = u^{-1}(x(t)).$$

Wir zeigen, dass $y(t)$ die Lösung eines Vektorfeldes $\dot{y} = g(y)$ in V ist.

Mit der Kettenregel folgt aus der Identität $x(t) = u(y(t))$ durch Differenzieren in t

$$\dot{x}(t) = du(y(t)) \cdot \dot{y}(t) = f(x(t)) = f(u(y(t))).$$

Daher

$$\dot{y}(t) = du(y(t))^{-1} \cdot f(u(y(t))),$$

so dass

$$\dot{y}(t) = g(y(t))$$

mit dem transformierten Vektorfeld $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$g(y) := (du(y))^{-1} \cdot f(u(y)), \quad y \in V.$$

Notation Das unter dem Diffeomorphismus $u : V \rightarrow U$ **transformierte Vektorfeld** bezeichnet man mit

$$(u^*f)(y) := du(y)^{-1} \cdot f(u(y)) \quad y \in V.$$

Wir haben bewiesen

Satz 7 Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf U und sei $x(t)$ eine Lösung von

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in U.$$

Sei $u : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus, dann ist $y(t)$, definiert durch

$$x(t) = u(y(t)),$$

eine Lösung des transformierten Vektorfeldes

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in V,$$

wobei

$$g(y) := du(y)^{-1} \cdot f(u(y)).$$

■

Folgerung: Die zugehörigen Flüsse transformieren sich ganz natürlich:

Satz 8 Sei $u : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus und sei $g = u^* f$. Dann gilt für die Flüsse φ^t von f und ψ^t von g

$$\psi^t(y) = u^{-1} \circ \varphi^t \circ u(y) \quad y \in V.$$

(wobei wir annehmen, dass f und g lokal Lipschitz-stetige Vektorfelder auf U resp. V sind.)

Beweis (Eindeutigkeit)

Definiere $\psi^t(y)$ durch die rechte Seite der Formel in Satz 8, dann ist wegen der Eindeutigkeit des Flusses nur zu zeigen:

- 1) $\psi^0(y) = y$
- 2) $\frac{d}{dt} \psi^t(y) = g(\psi^t(y))$.

Dies folgt aber sofort aus den Definitionen von $\psi^t(y)$ und $g(y)$:

- 1) Weil $\varphi^0 = id$, erhalten wir $\psi^0(y) := u^{-1} \circ \varphi^0 \circ u(y) = u^{-1} \circ u(y) = y$.
- 2) Differentiation von

$$u \circ \psi^t(y) = \varphi^t \circ u(y)$$

in t liefert:

$$du(\psi^t(y)) \cdot \frac{d}{dt} \psi^t(y) = \frac{d}{dt} (\varphi^t(u(y))) = f(\varphi^t(u(y))).$$

Daher:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi^t(y) &= du(\psi^t(y))^{-1} f(\varphi^t \circ u(y)) \\ &= du(\psi^t(y))^{-1} f(u \circ \psi^t(y)) \\ &= (u^* f)(\psi^t(y)) = g(\psi^t(y)). \end{aligned}$$

■

Beispiel in \mathbb{R}^2

Das Vektorfeld $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_2 + \varepsilon x_1 (1 - \|x\|^2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = -x_1 + \varepsilon x_2 (1 - \|x\|^2) \\ \|x\|^2 &:= x_1^2 + x_2^2.\end{aligned}$$

In der älteren Literatur nennt man dies ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Da der ε -unabhängige Teil eine Drehung bedeutet, betrachten wir das Vektorfeld in Polarkoordinaten, $x = u(y)$:

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 \cos y_2 = r \cos \varphi \\ x_2 &= y_1 \sin y_2 = r \sin \varphi,\end{aligned}$$

mit $(y_1, y_2) \equiv (r, \varphi)$. Hier ist $V = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 > 0, 0 \leq y_2 < 2\pi\}$ und $u: V \rightarrow U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zur Berechnung von u^*f stellen wir zuerst fest, dass

$$du(y)^{-1} = \frac{1}{y_1} \begin{pmatrix} y_1 \cos y_2 & y_1 \sin y_2 \\ -\sin y_2 & \cos y_2 \end{pmatrix}.$$

Damit wird, nach einer einfachen Rechnung,

$$\begin{aligned}(u^*f)(y) &= g(y) = du(y)^{-1} \cdot f(u(y)) \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon y_1 (1 - y_1^2) \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist daher in Polarkoordinaten viel einfacher:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \varepsilon r (1 - r^2), \quad r > 0 \\ \dot{\varphi} &= -1.\end{aligned}$$

Das System ist zerfallen in zwei "entkoppelte" Differentialgleichungen auf \mathbb{R} . Die Lösungen kann man explizit hinschreiben. Der Fluss $\psi^t(r, \varphi) = (r(t), \varphi(t))$ mit den Anfangsbedingungen $(r(0), \varphi(0)) = (r, \varphi)$ ist gegeben durch die Formeln

$$\begin{aligned}r(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\varepsilon t} \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)}}, \quad r > 0 \\ \varphi(t) &= \varphi - t.\end{aligned}$$

Jetzt wieder eingesetzt in $x(t) = u(y(t))$, erhalten wir den Fluss $\varphi^t(x) = (x_1(t), x_2(t))$ als

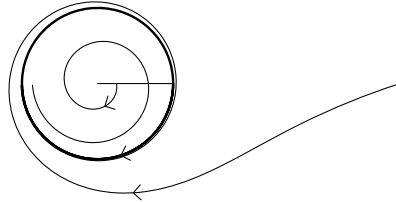
$$\begin{aligned}x_1(t) &= r(t) \cos \varphi(t) = r(t) \cos(\varphi - t) \\ x_2(t) &= r(t) \sin \varphi(t) = r(t) \sin(\varphi - t)\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(0) \cos \varphi \\ r(0) \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Wie sehen die Lösungen aus in \mathbb{R}^2 ? Weil $f(0) = 0$, so ist natürlich $x(t) \equiv 0$ eine Lösung. (Sogenannte Gleichgewichtslösung.)

$\epsilon > 0$:

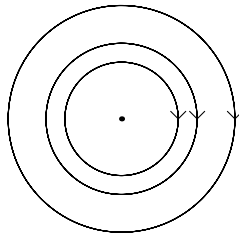


Im Falle $\epsilon > 0$ gilt $r(t) \rightarrow 1$ falls $t \rightarrow \infty$, für jede Anfangsbedingung $r(0) = r > 0$. Falls $r(0) = 1$, so folgt $r(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und der Einheitskreis trägt eine periodische Lösung der Periode 2π .

Falls $\epsilon = 0$, so ist $r(t) = r(0)$ konstant für jede Anfangsbedingung. Die Lösungen sind die Drehungen

$$x(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi - t) \\ r \sin(\varphi - t) \end{pmatrix}, \quad r > 0.$$

$\epsilon = 0$:



Im Falle $\epsilon > 0$ konvergieren alle Lösungen mit Ausnahme der Gleichgewichtslösung $x = 0$ für $t \rightarrow \infty$ gegen die periodische Lösung auf dem Kreis $r = 1$. Sie heisst ein **Grenzzyklus** des Systems.

Transformation eines zeitabhängigen Vektorfeldes

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Sei $x = u(t, y)$, wobei $u : (t, y) \mapsto u(t, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und, für jedes t fest sei die Abbildung u_t , definiert durch

$$y \mapsto u_t(y) := u(t, y),$$

ein Diffeomorphismus von \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n .

Sei $x(t)$ eine Lösung von f , d.h.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

dann definieren wir die transformierte Kurve $y(t)$ durch

$$x(t) = u(t, y(t)) \iff y(t) = u_t^{-1}(x(t)),$$

wobei $u_t(y) := u(t, y)$. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \dot{y}(t) \\ &= f(t, x(t)) = f(t, u(t, y(t))),\end{aligned}$$

so dass $y(t)$ die folgende Gleichung löst:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t))^{-1} \cdot \left\{ f(t, u(t, y(t))) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)) \right\} \\ &=: g(t, y(t)),\end{aligned}$$

mit dem transformierten zeitabhängigen Vektorfeld

$$g(t, y) := \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)^{-1} \cdot \left\{ f(t, u(t, y)) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) \right\}.$$

6. Tricks für \mathbb{R}^1

Einige Typen von Differentialgleichungen in \mathbb{R} , welche durch explizite Formeln lösbar sind.

I. $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, a, b stetig.

Der Fluss dieser sogenannten allgemeinen linearen inhomogenen Gleichung auf \mathbb{R} ist durch die Formel gegeben

$$\varphi_s^t(x) = e^{A(t)}x + e^{A(t)} \int_s^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau,$$

$$A(t) := \int_s^t a(\tau)d\tau,$$

mit der Anfangsbedingung zur Zeit $t = s$, $\varphi_s^s(x) = x$.

II. $\dot{x} = g(t) \cdot f(x)$, f, g stetig, $f(x) \neq 0$.

Sogenannte Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. In Kapitel XI haben wir eine Lösungsformel für die Lösung $x(t)$ mit Anfangsbedingung $x(t_0)$ hergeleitet. Sei F eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$ und G eine Stammfunktion von g , dann gilt

$$F(x(t)) = F(x(t_0)) + G(t) - G(t_0).$$

Mit der stetig differenzierbaren inversen Funktion F^{-1} erhalten wir

$$x(t) = \varphi_{t_0}^t(x(t_0)) = F^{-1}[F(x(t_0)) + G(t) - G(t_0)],$$

im Spezialfall $g(t) \equiv 1$:

$$x(t) = F^{-1}[F(x(t_0)) + t - t_0].$$

Beispiel $\dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2)$, $r > 0$

Die Funktion F , definiert durch

$$F(r) := -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{r^2} \right), \quad r > 1$$
$$F(r) := -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right), \quad 0 < r < 1$$

erfüllt $F'(r) = \frac{1}{r(1-r^2)}$. Die Lösung $r(t)$ mit Anfangsbedingung $r = r(0) > 1$ erfüllt $F(r(t)) = F(r) + \varepsilon t$, also

$$-\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{r(t)^2} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \varepsilon t.$$

Multiplikation mit -2 , Anwendung der Exponentialfunktion und Auflösung nach $r(t)$ liefert die Formel

$$r(t) = \varphi^t(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\epsilon t} \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)}}.$$

Dieselbe Formel gilt auch für die Anfangsbedingungen $0 < r \leq 1$ zur Zeit $t = 0$.

III. $\dot{x} = F\left(\frac{x}{t}\right) = f(t, x), \quad t \neq 0 \quad F \text{ stetig}$

Sogenannte homogene Differentialgleichung. Mit der Koordinatentransformation

$$x = u(t, y) = ty,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = t \neq 0$$

wird das transformierte Vektorfeld

$$\begin{aligned} \dot{y} = g(t, y) &= \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)^{-1} \cdot \left\{ f(t, u(t, y)) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) \right\} \\ &= \frac{1}{t} \{ F(y) - y \}, \end{aligned}$$

also vom Typ II. Falls $F(y) - y \neq 0$, erhalten wir durch Zurücktransformieren der Lösung $y(t)$ von g die Lösung

$$x(t) = ty(t).$$

IV. Bernoulli-Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha \quad (= f(t, x)) \text{ auf } x > 0$$

$$a, b \text{ stetig, } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 1.$$

Wir transformieren f auf ein Vektorfeld vom Typ I. Wähle β so, dass $(1 - \beta) + \alpha\beta = 0$, also $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$. Mit der Transformation

$$x = u(y) = y^\beta, \quad y > 0$$

$$du(y) = \beta y^{\beta-1},$$

erhalten wir das transformierte Vektorfeld

$$\begin{aligned} g(t, y) &= du(y)^{-1} f(t, u(y)) \\ &= \frac{1}{\beta} y^{1-\beta} \{ a(t)y^\beta + b(t)y^{\alpha\beta} \} \\ &= (1 - \alpha) [a(t)y + b(t)]; \end{aligned}$$

es ist vom Typ I. Ist $y(t) \geq 0$ eine Lösung von $\dot{y} = g(t, y)$, so erhalten wir die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = f(t, x)$ durch Rücktransformation,

$$x(t) = y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

V. $\dot{x} = F(at + bx + c) = f(t, x)$
 $b \neq 0, \quad F \text{ stetig .}$

Transformiere: mit

$$x = u(t, y) = \frac{1}{b}(y - at - c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = \frac{1}{b}$$

erhalten wir das transformierte Vektorfeld

$$g(t, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)^{-1} \left\{ f(t, u(t, y)) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) \right\}$$

$$= b \left\{ F(y) + \frac{a}{b} \right\}$$

$$= bF(y) + a,$$

es ist vom Typ II. Mit einer Lösung $y(t)$ des Vektorfeldes g erhalten wir die Lösung $x(t)$ von f ,

$$x(t) = \frac{1}{b}(y(t) - at - c).$$

Trickkiste für Lösungen von speziellen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

E. Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Band I,II.
 Teubner Verlag, Stuttgart.

7. Lineare, zeitunabhängige Vektorfelder

$$\dot{x} = f(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Das Vektorfeld ist Lipschitz-stetig, weil wegen der Linearität,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|,$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$, mit der Operatornorm $\|A\|$. Es existiert daher ein eindeutiger Fluss $\varphi^t(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und für alle $t \in \mathbb{R}$. Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion wird folgen, dass

$$\varphi^t(x) = e^{tA}x.$$

Zur Erinnerung (Definition der Exponentialfunktion)

$$\begin{aligned} e^{tA} &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} A^j \quad (A^0 \equiv \mathbf{1}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

mit der Konvergenz im vollständigen, normierten Raum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$; die Norm ist die Operatornorm.

Satz 9 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, für alle $t, s \in \mathbb{R}$ gilt

1. $e^{tA} \Big|_{t=0} = e^{0 \cdot A} = \mathbf{1}$.
2. $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{sA} \cdot e^{tA}$.
3. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.
4. Die Kurve $t \mapsto e^{tA} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig differenzierbar, und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{(t+h)A} - e^{tA}) \quad \text{in } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ &= A e^{tA} = e^{tA} \cdot A. \end{aligned}$$

Beweis

Da $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ein vollständiger normierter Raum ist, mit der Operatornorm $\|A\|$, so ist der Beweis identisch mit unserem Beweis für $t \mapsto e^{ta} \in \mathbb{C}$, für $a \in \mathbb{C}$; man ersetzt lediglich den Betrag $|a|$ in \mathbb{C} durch die Norm $\|A\|$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und benutzt, dass die Matrixmultiplikation $\{A, B\} \mapsto A \cdot B$,

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

eine stetige Abbildung ist. ■

Theorem 2 1. Der Fluss $\varphi^t(x)$ von $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ existiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und ist linear in x :

$$\varphi^t(x) = e^{tA}x \quad (\varphi^0(x) = x).$$

2. Ist $t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n$ stetig, so ist der Fluss von $\dot{x} = Ax + b(t)$ gegeben durch

$$\varphi_s^t(x) = e^{(t-s)A}x + \int_s^t e^{(t-\tau)A}b(\tau)d\tau$$

(mit $\varphi_s^s(x) = x$).

Beweis (Satz 9 und Eindeutigkeit)

Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi^t(x) := e^{tA}x$ und zeigen, dass $\varphi^t(x)$ der Fluss von $\dot{x} = Ax = f(x)$ ist.

$$1. \quad t = 0 : \varphi^0(x) = e^{0 \cdot A}x = \mathbf{1} \cdot x = x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{d}{dt}\varphi^t(x) &= \frac{d}{dt}(e^{tA}x) = \left(\frac{d}{dt}e^{tA}\right)x \\ &= A(e^{tA}x) = A\varphi^t(x) = f(\varphi^t(x)), \end{aligned}$$

nach Satz 9. ■

Frage: Wie sehen die Lösungen $\varphi^t(x)$, $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ tatsächlich aus?

Dies hängt ab von den Eigenwerten und den Verallgemeinerten Eigenräumen von A (**Jordan–Normalform** von A). Hierzu benutzt man die Transformationstheorie von Vektorfeldern. Sei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der lineare Diffeomorphismus

$$x = u(y) = Uy,$$

mit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\det U \neq 0$. Das transformierte Vektorfeld $[g(y) = du(y)^{-1} \cdot f(u(y))]$ ist wieder linear. Mit $du(y) = U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist es gegeben durch die Formel

$$\dot{y} = g(y) = \underbrace{U^{-1}AU}_{B}(y) = By.$$

Wir suchen nun ein $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ so, dass B von möglichst einfacher Gestalt ist (Jordan'sche Normalform). Aus dieser kann man den Fluss $\psi^t(y)$ von $g(y)$

$$\psi^t(y) = e^{tB}y, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

explizit ablesen. Dann transformiert man zurück und findet für den Fluss $\varphi^t(x) = e^{tA}x$ die Formel

$$\begin{aligned}\varphi^t(x) &= U \circ \psi^t(U^{-1}x) \\ &= U e^{tB} U^{-1}x \\ &= e^{tUBU^{-1}}x = e^{tA}x.\end{aligned}$$

Wir illustrieren die Lösungsstruktur im Spezialfall eines linearen Vektorfeldes in zwei Dimensionen.

8. Spezialfall \mathbb{R}^2 , Dynamik von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

$$\dot{x} = Ax, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Mit den Abkürzungen

$$D := \text{Determinante}(A) = ad - bc,$$

$$S := \text{Spur}(A) = a + d,$$

sind die Eigenwerte von A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = \lambda^2 - S\lambda + D$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gibt also zwei Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(S \pm \sqrt{S^2 - 4D} \right),$$

für die wir im folgenden meistens λ, μ schreiben.

Fall I

$$S^2 - 4D > 0$$

In diesem Fall hat A zwei reelle Eigenwerte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$. Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei Eigenvektoren, $Av = \lambda v$ und $Aw = \mu w$. Wir nehmen sie als Spaltenvektoren der Matrix $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

$$U = (v|w).$$

Weil v, w linear unabhängig sind, ist die Matrix U regulär, $\det U \neq 0$. Aus

$$\begin{aligned}AU &= (Av|Aw) = (\lambda v|\mu w) \\ &= (v|w) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\end{aligned}$$

folgt die Darstellung von A in der Eigenbasis v, w von \mathbb{R}^2 :

$$U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} =: B.$$

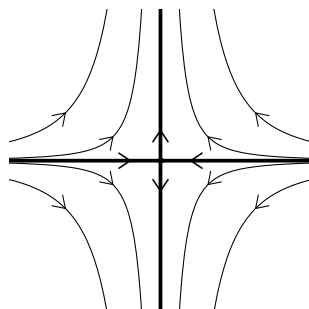
Unter der linearen Transformation $x = Uy$ ist also das transformierte Vektorfeld gegeben durch

$$\dot{y} = By = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \mu y_2 \end{pmatrix},$$

mit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Der Fluss ist daher

$$\psi^t(y) = e^{tB}y = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}y_1 \\ e^{\mu t}y_2 \end{pmatrix}.$$

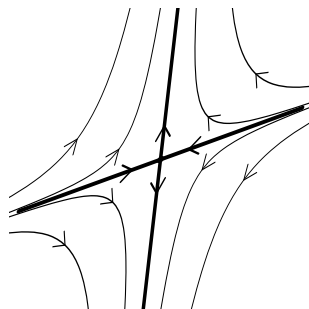
Geometrisch erhalten wir im y -Raum das folgende Bild für die Lösungskurven in \mathbb{R}^2 , im Fall $\lambda < 0 < \mu$:



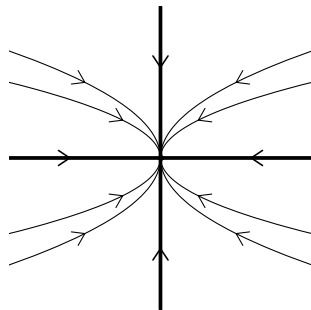
Der Koordinatenursprung $0 \in \mathbb{R}^2$ ist ein Gleichgewichtspunkt des Vektorfeldes, $B(0) = 0$, die zugehörige Lösung ist $\psi^t(0) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Koordinatenachsen sind die Eigenräume von B .

Jede Achse ist invariant unter dem Fluss, zum Beispiel $\psi^t(y_1, 0) = (e^{\lambda t}y_1, 0)$, alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $(y_1, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

Auf der y_1 -Achse konvergieren die Lösungen gegen den Ursprung 0 für $t \rightarrow +\infty$, auf der y_2 -Achse für $t \rightarrow -\infty$. Die einzige, für **alle** Zeiten beschränkte Lösung ist der Gleichgewichtspunkt 0 . Er ist unstabil und heisst ein **hyperbolischer** Gleichgewichtspunkt. In den ursprünglichen x -Koordinaten erhalten wir das Bild für den Fluss $\varphi^t(x)$ von $\dot{x} = Ax$:



Die Struktur aller Lösungskurven im y -Raum im Falle negativer Eigenwerte $\lambda < \mu < 0$ sieht geometrisch völlig anders aus:



In diesem Fall ist $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi^t(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$. Der Gleichgewichtspunkt 0 heisst asymptotisch stabil oder ein **Attraktor**. Analog erhalten wir im Falle positiver Eigenwerte $0 < \lambda < \mu$ einen Repeller als Gleichgewichtspunkt.

Fall II

$$\boxed{S^2 - 4D = 0} \quad \lambda = \mu \in \mathbb{R}$$

II a: $\lambda = \mu \in \mathbb{R}$ und A sei **diagonalisierbar**, d.h. es gibt zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

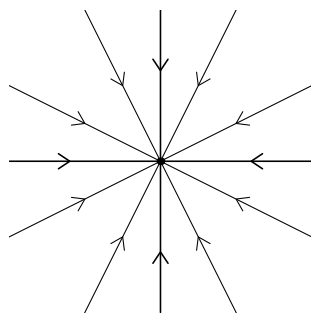
Jeder Vektor $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und

$$B = U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = A,$$

mit Fluss

$$\psi^t(y) = e^{tB}y = e^{\lambda t}y, \quad y \in \mathbb{R}^2.$$

Ist $\lambda < 0$, so folgt $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi^t(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$ und der Ursprung 0 ist wieder ein Attraktor:



II b $\lambda = \mu \in \mathbb{R}$ und A ist **nicht diagonalisierbar**.

In diesem Fall gibt es **genau einen** Eigenvektor $v \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ mit $Av = \lambda v$. Sei $u \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig von v , dann folgt $(A - \lambda)u \neq 0$ und deshalb $(A - \lambda)u = \alpha v + \beta u$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Es folgt $A(\alpha v + \beta u) = (\lambda + \beta)(\alpha v + \beta u)$ und daher $\beta = 0$ und $\alpha \neq 0$. Es gibt also zwei linear unabhängige Vektoren v und w in \mathbb{R}^2 mit

$$Av = \lambda v, \quad (A - \lambda)w = v.$$

Definieren wir die Transformation $x = Uy$ durch $U = (v|w)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} AU &= (Av|Aw) = (\lambda v|\lambda w + v) \\ &= (v|w) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Jordan'sche Normalform in diesem Fall ist

$$B = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

und wieder kann der Fluss $\psi^t(y)$ des transformierten Vektorfeldes

$$\dot{y} = By$$

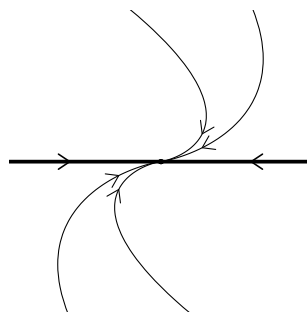
einfach berechnet werden. Wir zerlegen

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{1} + D, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Matrizen $\lambda \mathbf{1}$ und D vertauschen miteinander. Weil $D^2 = 0$, erhalten wir, nach Definition der Exponentialreihe,

$$\begin{aligned} \psi^t(y) &= e^{tB}y = e^{t(\lambda \mathbf{1} + D)}y \\ &= e^{t\lambda \mathbf{1}}e^{tD}y = e^{\lambda t}(\mathbf{1} + tD)y \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t}(y_1 + ty_2) \\ e^{\lambda t}y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

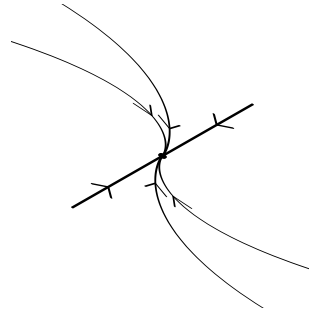
für $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. In den Lösungen taucht in diesem Fall der Term $te^{\lambda t}$ auf! Im Falle $\lambda = \mu < 0$ sieht die Lösungsstruktur in den y -Koordinaten geometrisch folgendermassen aus:



Es gibt einen ausgezeichneten linearen invarianten Teilraum, den Eigenraum $\mathbb{R}(1, 0)$ zum (einzigem) Eigenwert λ von B . Der Ursprung ist wieder ein Attraktor;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^t(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^2.$$

In den x -Koordinaten:



Fall III

$$\boxed{S^2 - 4D < 0} \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$$

Es gibt zwei konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda = \alpha + i\omega$ und $\mu = \bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ mit den reellen Zahlen $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$. Hiezu gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren z und $\bar{z} \in \mathbb{C}^2$ mit $Az = \lambda z$ und $A\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}$. Da $\lambda \neq \bar{\lambda}$, sind die Vektoren z, \bar{z} linear unabhängig in \mathbb{C}^2 . Definieren wir die reellen Vektoren $v, u \in \mathbb{R}^2$ durch

$$z = v + iu,$$

so sind sie linear unabhängig in \mathbb{R}^2 , und aus $A(v + iu) = (\alpha + i\omega)(v + iu)$ folgt durch Zerlegen in Real- und Imaginär-Teil

$$Av = \alpha v - \omega u$$

$$Au = \omega v + \alpha u.$$

Definieren wir die Transformation $x = Uy$ durch $U = (v|u)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} AU &= A(v|u) = (Av|Au) \\ &= (v|u) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die reelle Jordan'sche Normalform ist in diesem Fall

$$B = U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix},$$

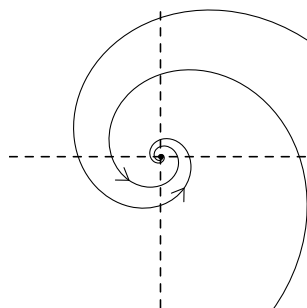
wobei, zur Erinnerung, $\lambda = \alpha + i\omega$, $\omega \neq 0$. Den Fluss $\psi^t(y)$ von $\dot{y} = By$ können wir wieder einfach hinschreiben. Wir spalten auf

$$B = \alpha \mathbf{1} + \Omega, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann vertauschen die Matrizen $\alpha \mathbf{1}$ und Ω und wir erhalten für die Exponentialreihe

$$\begin{aligned}\psi^t(y) &= e^{tB}y = e^{t\alpha \mathbf{1}} \cdot e^{t\Omega}y \\ &= e^{t\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\alpha}(\cos \omega t)y_1 + e^{t\alpha}(\sin \omega t)y_2 \\ -e^{t\alpha}(\sin \omega t)y_1 + e^{t\alpha}(\cos \omega t)y_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ zur Zeit $t = 0$. Geometrisch, im Falle $\alpha < 0$ und $\omega > 0$,



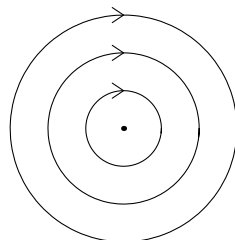
Es ist $\|e^{tB}\|^2 = e^{2\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$, und 0 ist ein **asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt**.

Spezialfall: $\alpha = 0$, $\lambda = i\omega$, $\omega \neq 0$.

$$B = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & +\omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^t(y) = e^{tB}y = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} y.$$

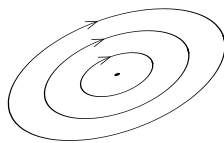
Es ist $\|e^{tB}\| = 1$. Geometrische Lösungsstruktur im y -Raum:



Der Gleichgewichtspunkt 0 heisst ein **Zentrum**, er ist stabil für $t \rightarrow +\infty$ und $t \rightarrow -\infty$. Alle Lösungen sind periodisch mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Sie liegen auf Kreisen, welche die Niveau-Mengen des Integrals

$$F(y) := \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2$$

für das Vektorfeld $g(y) = By$ sind. In den x -Koordinaten werden die Kreise zu Ellipsen, den Niveau-Mengen für das transformierte Integral $\widehat{F}(x) = F(U^{-1}x)$ im x -Raum.



Für den allgemeinen Fall eines linearen Vektorfeldes $\dot{x} = Ax$ in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ verweisen wir auf das Buch von H. Amann.

9. Differentialgleichungen 2. Ordnung auf \mathbb{R}

Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ aus der Klasse $C^2(I)$ heisst Lösung der Gleichung 2. Ordnung

$$(1) \quad \ddot{x} = F(t, x, \dot{x}),$$

falls sie auf dem Intervall I die Identität erfüllt

$$\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad t \in I.$$

Der Zusammenhang mit zeitabhängigen Vektorfeldern auf \mathbb{R}^2 ist der folgende: Sei $x \in C^2(I)$ eine Lösung von (1), dann können wir die stetig differenzierbare Kurve $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ in \mathbb{R}^2 definieren durch

$$\alpha(t) := (x(t), y(t)) := (x(t), \dot{x}(t)).$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= F(t, x(t), y(t)), \quad t \in I, \end{aligned}$$

das heisst $t \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Lösung des zeitabhängigen Vektorfeldes $f(t, x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(t, x, y) := \begin{pmatrix} y \\ F(t, x, y) \end{pmatrix},$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ist umgekehrt $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eine Lösung von (2), dann ist $t \mapsto x(t)$ aus $C^2(I, \mathbb{R})$ und eine Lösung von (1). In diesem Sinn sind die Gleichungen 2. Ordnung (1) **äquivalent** zu speziellen Vektorfeldern (2) auf \mathbb{R}^2 . Es folgt insbesondere aus Theorem 1 und den anschliessenden Diskussionen:

Satz 10 *Existenz und Eindeutigkeit.*

Sei $F = F(t, x, y)$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann hat das A.W.P.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= F(t, x, \dot{x}) \\ x(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

für vorgegebene $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ genau eine Lösung $x \in C^2(I)$ auf einem maximalen Zeitintervall I , welches t_0 enthält. Es gilt dann also

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= F(t, x(t), \dot{x}(t)), & t \in I \\ \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0, \end{array} \right. & \text{für } t = t_0. \end{aligned}$$

Beweis (Theorem 1)

Die Lösung $x(t, x_0, y_0)$ ist die erste Komponente des Flusses $\varphi_{t_0}^t(x_0, y_0)$ des zeitabhängigen Vektorfeldes $f(t, x, y)$ auf \mathbb{R}^2 in (2). ■

Beispiel Die lineare Gleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf \mathbb{R}

$$(1) \quad \ddot{x} + \beta\dot{x} + \alpha x = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ist äquivalent zum linearen Vektorfeld in \mathbb{R}^2

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\beta y - \alpha x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha})$ und wir unterscheiden deshalb die Fälle:

$$\beta^2 - 4\alpha > 0 \implies \text{Fall I}$$

$$\beta^2 = 4\alpha \neq 0 \implies \text{Fall IIb}$$

$$\beta^2 - 4\alpha < 0 \implies \text{Fall III.}$$

Im Falle $\beta^2 = 4\alpha \neq 0$ ist eine Transformation auf die Jordan'sche Normalform:

$$U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben durch:

$$U := \begin{pmatrix} 2 & \frac{\beta}{\alpha} \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Spezialfälle

III. $\beta = 0, \quad \alpha > 0$

$$\ddot{x} + \alpha x = 0$$

Schwingungsgleichung; die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha}$ und der Fluss $\varphi^t(x, y)$ von (2) ist gegeben durch

$$\varphi^t(x, y) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha}t) & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha}t) \\ -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}t) & \cos(\sqrt{\alpha}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist dann $\varphi^0(x, y) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die erste Komponente

$$x(t) := x \cos(\sqrt{\alpha}t) + y \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha}t)$$

ist dann die eindeutige Lösung von $\ddot{x} + \alpha x = 0$ zu den Anfangsbedingungen $x(0) = x$ und $\dot{x}(0) = y$.

I. $\beta = 0, \quad \alpha < 0$

$$\ddot{x} + \alpha x = 0$$

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\alpha}$ sind jetzt reell. Mit

$$\cosh(\tau) := \frac{1}{2} (e^\tau + e^{-\tau})$$

$$\sinh(\tau) := \frac{1}{2} (e^\tau - e^{-\tau}), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

ist der Fluss von (2) in diesem Fall

$$\varphi^t(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{-\alpha}t) & \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \sinh(\sqrt{-\alpha}t) \\ \sqrt{-\alpha} \sinh(\sqrt{-\alpha}t) & \cosh(\sqrt{-\alpha}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und die erste Komponente,

$$x(t) := x \cosh(t\sqrt{-\alpha}) + y \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \sinh(t\sqrt{-\alpha})$$

ist die eindeutige Lösung des A.W.P. $\ddot{x} + \alpha x = 0$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x$ und $\dot{x}(0) = y$ zur Zeit $t = 0$.

10. Lineare zeitabhängige Vektorfelder auf \mathbb{R}^n

Das Vektorfeld

$$\dot{x} = A(t)x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit $t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig, ist lokal Lipschitz-stetig in x . Der eindeutige Fluss $\varphi_s^t(x)$ ist, wie üblich, definiert als Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_s^t(x) &= A(t)\varphi_s^t(x), & t \in \mathbb{R}, \\ \varphi_s^s(x) &= x, & t = s. \end{aligned}$$

Der Fluss existiert für alle Zeiten und ist linear in den Anfangsbedingungen,

$$\varphi_s^t(ax + by) = a\varphi_s^t(x) + b\varphi_s^t(y), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dies folgt aus der Linearität und Eindeutigkeit der Lösungen, weil beide Seiten dasselbe Anfangswertproblem mit derselben Anfangsbedingung $ax + by$ zur Zeit $t = s$ erfüllen.

Im Spezialfall $A(t) = A$, also konstant für alle t , hat man die Formel

$$\varphi_s^t(x) = e^{(t-s)A} \cdot x$$

für den Fluss. Der zeitabhängige Fall ist viel schwieriger, hier sucht man zunächst nach **einzelnen** Lösungen.

$V =$ Lösungsraum

$$:= \{ \alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{\alpha}(t) = A(t)\alpha(t) \\ \text{für alle } t \in \mathbb{R} \}$$

Satz 11 $V \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Teilraum und $\dim V = n$.

Beweis Definiere, für $s \in \mathbb{R}$, fest die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V : x \longmapsto \psi(x) = \alpha_x,$$

mit $\alpha_x(t) := \varphi_s^t(x)$. Dann ist, nach Definition des Flusses, $\alpha_x \in V$ und die Abbildung ψ ist linear. Wegen der Eindeutigkeit des A.W.P. ist ψ injektiv, sie ist auch surjektiv (also ein linearer Isomorphismus). Denn sei $\alpha \in V$ eine Lösung mit $\alpha(s) = x_0$. Dann ist auch $\varphi_s^t(x_0)$ eine Lösung mit derselben Anfangsbedingung x_0 zur Zeit $t = s$, so dass $\alpha(t) = \varphi_s^t(x_0) = \psi(x_0)(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $\alpha = \psi(x_0)$ wie behauptet. ■

Definition n linear unabhängige Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$ (also eine Basis in V) bilden ein **Fundamentalsystem**. Ein solches System existiert immer:

zum Beispiel:

$$\alpha_j(t) := \varphi_s^t(e_j), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dies folgt aus dem nächsten Satz.

Satz 12 Die Kurven $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in V$ sind linear unabhängig im Vektorraum $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ genau dann, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Vektoren $\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig in \mathbb{R}^n sind.

Beweis Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus der Eindeutigkeit des Anfangswertproblems. ■

Jede Lösung $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ist also eine **Linearkombination** eines **Fundamentalsystems**.

11. Differentialgleichungen höherer Ordnung

Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heisst eine Funktion $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ eine Lösung der Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$(1) \quad y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}),$$

falls sie die Identität erfüllt

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)),$$

für alle $t \in I$. Zum Beweis der Äquivalenz mit einem speziellen Vektorfeld auf \mathbb{R}^n betrachten wir die Lösung $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ von (1) und definieren die Kurve $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ in \mathbb{R}^n durch

$$\begin{aligned} \alpha(t) &:= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &= (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Sie erfüllt, für alle $t \in I$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= F(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned}$$

so dass $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung des zeitabhängigen Vektorfeldes (2) auf \mathbb{R}^n ist:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \\ f(t, x) &:= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ F(t, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ist umgekehrt $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (2), so ist seine erste Komponenten-Funktion $y(t) = x_1(t)$ aus $C^n(I, \mathbb{R})$ und eine Lösung von (1). Wir schliessen also aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz für Vektorfelder auf \mathbb{R}^n das folgende Resultat.

Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und lokal Lipschitz-stetig in $x \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das A.W.P.

$$\begin{cases} y^{(n)} & = F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) & = x_1 \\ \dot{y}(t_0) & = x_2 \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) & = x_n \end{cases}$$

für jedes vorgegebene $(t_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ genau eine maximale Lösung, nämlich die erste Komponente $y(t) = x_1(t)$ des Flusses $\varphi_{t_0}^t(x)$ des Vektorfeldes $f(t, x)$ in (2) auf \mathbb{R}^n .

Beispiel Lineare Gleichung n -ter Ordnung homogen, mit konstanten Koeffizienten.

$$(1) \quad Ly := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_0y = 0,$$

mit den Konstanten $a_j \in \mathbb{R}$. Das zugehörige spezielle Vektorfeld in \mathbb{R}^n ist linear, und unabhängig von der Zeit t :

$$(2) \quad \dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Die Lösung $y(t)$ von (1) zu den n Anfangsbedingungen $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zur Zeit $t = 0$ ist also die erste Komponente des Flusses $\varphi^t(x) = e^{tA}x$ von (2).

Entwicklung von $\det(A - z\mathbf{1})$ nach der letzten Zeile führt zur Darstellung des charakteristischen Polynoms von A :

$$\begin{aligned} P(z) &= \det(A - z\mathbf{1}) \\ &= (-1)^n [z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0], \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}$. Dieses Polynom bestimmt alle Lösungen von $Ly = 0$ folgendermassen. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle,

$$P(\lambda) = 0.$$

Dann folgt für die Funktion $y(t) = e^{\lambda t}$, dass

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda t}) &= \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_0 e^{\lambda t} \\ &= (-1)^n \underbrace{P(\lambda)}_{=0} e^{\lambda t} = 0. \end{aligned}$$

Falls $\lambda \in \mathbb{R}$ reell ist, so ist $y(t) = e^{\lambda t}$ eine reelle Lösung. Falls $\lambda = \alpha + i\omega$ mit $\omega \neq 0$ eine komplexe Nullstelle ist, dann ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ eine Nullstelle, da ja das Polynom reell ist. Real- und Imaginär-Teil von $e^{\lambda t} = e^{\alpha t} [\cos \omega t + i \sin \omega t]$ sind zwei reelle Lösungen von $L(y) = 0$. Sei nun λ eine k -fache Nullstelle von P . Dann ist das charakteristische Polynom P von der Form

$$P(z) = (z - \lambda)^k P_{n-k}(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

mit $P_{n-k}(\lambda) \neq 0$. Wir zeigen, dass in diesem Fall alle Funktionen

$$y_r(t) := t^r e^{\lambda t}, \quad 0 \leq r \leq k-1$$

Lösungen von $L(y) = 0$ sind. Falls $\lambda = \alpha + i\omega$ mit $\omega \neq 0$ komplex ist, so erhalten wir auf diese Weise $2k$ reelle Funktionen für das Paar $(\lambda, \bar{\lambda})$ von Nullstellen. Der Trick ist die Einführung eines Parameters μ :

$$t^r e^{\mu t} = \left(\frac{d}{d\mu} \right)^r (e^{\mu t}).$$

Weil die Ableitungen vertauschen,

$$\begin{aligned} L(t^r e^{\mu t}) &= L\left(\left(\frac{d}{d\mu}\right)^r e^{\mu t}\right) \\ &= \left(\frac{d}{d\mu}\right)^r L(e^{\mu t}) \\ &= (-1)^n \left(\frac{d}{d\mu}\right)^r [P(\mu) e^{\mu t}]. \end{aligned}$$

Benutzen wir nun, dass $P(\mu) = (\mu - \lambda)^k P_{n-k}(\mu)$ ist, so erhalten wir für $\mu = \lambda$

$$\left. \left(\frac{d}{d\mu}\right)^r [P(\mu) e^{\mu t}] \right|_{\mu=\lambda} = 0,$$

für alle $0 \leq r \leq k-1$. Da ein reelles Polynom n -ter Ordnung n Nullstellen in \mathbb{C} hat, und mit λ auch $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle ist, erhalten wir das folgende Resultat.

Theorem 3 *Die Differentialgleichung*

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

hat die folgenden n reellen Lösungen y , entsprechend den n Nullstellen des charakteristischen Polynoms P :

- $\lambda \in \mathbb{R}$ sei k -fache Nullstelle von P :

$$t^r e^{\lambda t}, \quad 0 \leq r \leq k-1.$$

- $\lambda = \alpha + i\omega$, $\omega \neq 0$, sei eine k -fache Nullstelle (dann ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ eine k -fache Nullstelle) und wir erhalten für das Paar $(\lambda, \bar{\lambda})$ die $2k$ reellen Lösungen

$$t^r e^{\alpha t} \cos \omega t$$

$$t^r e^{\alpha t} \sin \omega t, \quad 0 \leq r \leq k-1.$$

Diese n Lösungen sind linear unabhängig in $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Jede Lösung y von $L(y) = 0$ ist eine Linearkombination dieser n Lösungen.

Beweis Im Hinblick auf Satz 11 bleibt nur noch zu zeigen, dass die n Funktionen linear unabhängig sind. Wir überlassen diesen Nachweis dem Leser als Übungsaufgabe, oder verweisen auf das oben zitierte Buch von H. Amann. ■