Kapitel 14

Wegintegrale

27. Mai 2003

1. 1-Formen und Wegintegrale

Definition. *Eine 1–Form (Differentialform 1. Ordnung) auf einer offenen Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ist eine Abbildung*

$$\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\,; \quad x \longmapsto \omega(x)\,.$$

Sie ordnet also jedem Punkt $x \in U$ *eine Linearform* $\omega(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *zu, d. h. für festes* x *ist die Abbildung* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \omega(x)[v]$ *linear. Den Vektorraum aller 1–Formen auf* U *bezeichnet man mit* $\Lambda^1(U)$.

Beispiel: Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion aus aus C^1. Dann ist die Ableitung $d\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, für jedes $x \in U$. Daher ist die Abbildung

$$d\varphi : x \longmapsto d\varphi(x)\,, \quad x \in U$$

eine (stetige) 1–Form auf U. Solche speziellen 1–Formen $\omega = d\varphi$ heissen **exakte 1–Formen**.

Koordinatendarstellung von 1–Formen in $\mathbb{R}^n$ und Zusammenhang mit Vektorfeldern

In der kanonischen Basis $\{e_j\}$, $1 \le j \le n$ von $\mathbb{R}^n$ stellt sich der Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ dar als

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j\,.$$

Weil $\omega(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ linear ist,

$$\begin{aligned} \omega(x)[v] &= \omega(x)\left[\sum v_j e_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \omega(x)[e_j]\,. \end{aligned}$$

Die Koordinatenfunktionen $f_j : U \to \mathbb{R}$ von ω sind definiert als

$$f_j(x) \;:=\; \omega(x)[e_j]\,, \qquad 1 \leq j \leq n\,,$$

und wir erhalten die Darstellung

$$\omega(x)[v] \;=\; \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \cdot v_j\,, \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

von ω durch die n–Funktionen f_j .

Definition. *Die speziellen, exakten 1–Formen auf* $\mathbb{R}^n$, $dx_j = e_j^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *der Basis im Dualraum von* $\mathbb{R}^n$ *, sind definiert durch*

$$dx_j[v] = v_j\,, \qquad 1 \leq j \leq n\,,$$

für alle $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *. Die Linearform* dx_j *ist die Ableitung der Funktion* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ *; sie ist konstant. Damit erhalten wir die folgende Darstellung der 1–Form* ω *:*

$$\boxed{\omega(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} f_j(x) dx_j}$$

mit den Koordinatenfunktionen $f_j(x) = \omega(x)[e_j]$ *. Speziell für* $\omega = d\varphi$ *,*

$$\boxed{d\varphi(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \cdot dx_j\,,}$$

hier ist $f_j(x) = d\varphi(x)[e_j] = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)$ *. Man nennt* ω *stetig, falls die Funktionen* $f_j : U \to \mathbb{R}$ *alle stetige Funktionen sind;* ω *gehört zur Klasse* C^k *, falls* $f_j \in C^k(U, \mathbb{R})$ *.*

Bemerkung: Jede nicht degenerierte Bilinearform B auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definiert einen linearen Isomorphismus φ_B vom Vektorraum $\mathbb{R}^n$ auf seinen Dualraum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ durch $\varphi_B(v)[\cdot] = B(v, \cdot)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Nehmen wir für B speziell das **Euklidische Skalarprodukt** $B(v,w) := \langle v, w \rangle$, so erhalten wir den ein–eindeutigen linearen Zusammenhang zwischen den 1–Formen ω auf U und den Vektorfeldern $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf U:

$$\omega(x)[v] \;=\; \langle f(x), v \rangle\,, \qquad \text{alle } v \in \mathbb{R}^n\,,$$

wobei das Vektorfeld

$$f(x) \;=\; (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

definiert ist durch die Koordinatenfunktionen $f_j(x) = \omega(x)[e_j]$. Im Spezialfall $\omega = d\varphi$ erhalten wir

$$d\varphi(x)[v] \;=\; \langle \nabla\varphi(x), v \rangle\,, \quad \text{alle } v \in \mathbb{R}^n\,,$$

mit dem Gradienten

$$\nabla\varphi(x) \;=\; \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x) \right) .$$

Das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heisst in der Physik (das zur 1–Form ω gehörende) Kraftfeld. Falls $f = \nabla\varphi$, so heisst das Kraftfeld f ein Potentialfeld mit der Potentialfunktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$.
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma([a,b]) \subset U$. Dann ist $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ und der Tangentialvektor im Punkt $\gamma(t)$ ist der Vektor $\Big(\dot\gamma_1(t), \ldots, , \dot\gamma_n(t)\Big) \in \mathbb{R}^n$.

Definition. *Das* ***Wegintegral*** *der stetigen 1–Form ω auf U (des zugehörigen stetigen Kraftfeldes f auf U) längs des Weges γ ist die Zahl*

$$\begin{aligned} &\int_a^b \omega(\gamma(t))[\dot\gamma(t)]dt \\ &= \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_j(t) dt\,. \end{aligned}$$

Abkürzungen für diese Zahl:

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_\gamma \sum_{j=1}^{n} f_j dx_j \;=\; \int_\gamma f\,.$$

Physikalisch ist das Wegintegral die Arbeit, welche das Kraftfeld f längs des Weges γ leistet. Es ist der Grenzwert der Riemann–Summen

$$\sum_{j=1}^{N} \langle f(\gamma(t_j))\,,\,\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\rangle$$

$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\,.$

Satz 1. (Unabhängigkeit von der Parametrisierung des Weges)

Sei $\psi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *stetig differenzierbar mit* $\psi(\alpha) = a$ *und* $\psi(\beta) = b\,.$ *Dann*

$$\int_{\gamma\circ\psi} f \;=\; \int_\gamma f\,, \qquad \textit{jedes Kraftfeld } f\,.$$

Beweis. (Substitutionsregel, Kettenregel)

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\psi} f \;:\; &= \int_\alpha^\beta \langle f(\gamma(\psi(s)))\,,\,(\gamma\circ\psi)^{\dot{}}(s)\rangle ds \\ &= \int_\alpha^\beta \langle f(\gamma(\psi(s)))\,,\,\dot\gamma(\psi(s))\rangle\cdot\dot\psi(s) ds\,.\end{aligned}$$

Setze $t = \psi(s)$; mit $a = \psi(\alpha)$ und $b = \psi(\beta)$ folgt

$$= \int_a^b \langle f(\gamma(t))\,,\,\dot\gamma(t)\rangle dt \;=:\; \int_\gamma f\,.$$

$\square$

Definiere die zur Kurve

$$\gamma \ : \ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \,,$$

entgegengesetzt durchlaufene Kurve durch

$$\gamma^- \ : \ [a,b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^n \,, \qquad \gamma^-(t) \ := \ \gamma(a+b-t) \,,$$

dann ist $\gamma^-(a) \ = \ \gamma(b)$ und $\gamma^-(b) = \gamma(a)$.

Satz 2. (Orientierung)

$$\int_{\gamma^-} f \ = \ -\int_{\gamma} f \,, \qquad \textit{jedes Kraftfeld } f \,.$$

Beweis. (Substitutionsregel wie in Satz 1)

□

Die Berechnung des Linienintegrals für Potentialfelder ist einfach!

Satz 3. *Sei $f = \nabla\varphi$ ein Potentialfeld auf U, sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine Kurve, die $x = \gamma(a)$ mit $y = \gamma(b)$ verbindet, dann ist*

$$\int_{\gamma} \nabla\varphi \ = \ \varphi(y) - \varphi(x) \ = \ \int_{\gamma} d\varphi \,.$$

Das Wegintegral ist aber unabhängig von der Wahl der Kurve γ, die x mit y verbindet. Satz 3 verallgemeinert den H.S. in $\mathbb{R}$:

$$\int_x^y \varphi'(t)dt \ = \ \varphi(y) - \varphi(x) \,.$$

Beweis. (Kettenregel und H.S.)

$$\begin{aligned}\int_\gamma d\varphi \ :&= \int_a^b d\varphi(\gamma(t))\cdot[\dot\gamma(t)]dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}[\varphi(\gamma(t))]dt \\ &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \\ &= \varphi(y) - \varphi(x)\,.\end{aligned}$$

$\square$

Falls $M_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = c\}$ eine Potentialfläche ist, und der Weg γ auf M_c startet und endet, $\gamma(a)$ und $\gamma(b) \in M_c$, so folgt aus Satz 3

$$\int_\gamma \nabla\varphi \ = \ c - c \ = \ 0\,.$$

Beispiele $U \ = \ \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$
Definiere $\varphi : U \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) \ := \ F(\|x\|)\,, \quad \|x\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

für eine differenzierbare Funktion $F\colon \ \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\nabla\varphi(x) \ = \ F'(\|x\|)\cdot\frac{x}{\|x\|}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\,.$$

Es folgt für $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$:

$$\int_\gamma \nabla\varphi \ = \ F(\|y\|) - F(\|x\|)\,.$$

Spezialfall: Newton–Potential.

$$\varphi(x) \ = \ F(\|x\|) \ = \ -\frac{1}{\|x\|}\,, \quad x \neq 0\,.$$

Arbeit der Gravitationskraft:

$$\int_\gamma \nabla\varphi \ = \ -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\,,$$

falls $\|\gamma(a)\| = r_1 > 0$ und $\|\gamma(b)\| = r_2 > 0$.

Das Wegintegral kann natürlich definiert werden für stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurven, d.h. für

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \quad \text{stetig},$$

und, für

$$a \;=\; t_0 < t_1 < t_2 < \ldots, < t_N \;=\; b,$$
$$\gamma : [t_{j-1}, t_j] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{aus } C^1.$$

Definiere die Kurvenstücke $\gamma_j = \gamma \mid [t_{j-1}, t_j]$. Man schreibt symbolisch

$$\gamma \;=\; \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N,$$

und definiert

$$\int_\gamma f \;:=\; \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \cdots + \int_{\gamma_N} f.$$

Folgerung aus Satz 3:
Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine geschlossene Kurve, d.h. $\gamma(b) = \gamma(a)$, dann gilt

$$\int_\gamma \nabla\varphi \;=\; 0.$$

Falls also $\int_\gamma f \neq 0$ für eine geschlossene Kurve γ, so kann f kein Potentialfeld sein.
Wann ist ein Kraftfeld f ein Potentialfeld?

Definition. *Eine **offene** Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst **zusammenhängend**, falls je zwei Punkte in U durch einen Streckenzug in U miteinander verbunden werden können.*

Theorem 1. (Stammfunktion) *Sei $U \to \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, sei $f : U \subset \mathbb{R}^n$ ein stetiges Kraftfeld. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f = \nabla\varphi$ für ein $\varphi : U \to \mathbb{R}$ aus C^1.*

(ii) *$\int_\gamma f = 0$ für jede geschlossene Kurve γ in U.*

(iii) *Für je zwei Punkte $x, y \in U$ gilt: $\int_\gamma f$ hängt nicht ab von der Wahl der Kurve γ, welche x mit y in U verbindet.*

Beweis.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) soeben bewiesen.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) .

Um eine Funktione $\varphi : U \to \mathbb{R}$ aus C^1 zu konstruieren mit $\nabla\varphi(x) = f(x)$, $x \in U$, wählen wir einen festen Punkt $P \in U$ und definieren für $x \in U$

$$\varphi(x) \;=\; \int_{\alpha_x} f\,,$$

wobei α_x ein Weg ist, der P mit x in U verbindet: $\alpha_x : [0,1] \to U$, $\alpha_x(0) = P$ und $\alpha_x(1) = x$. Nach Voraussetzung (ii) ist $\varphi(x)$ unabhängig von der Wahl der Kurven α_x . Ist nämlich $\beta_x : [0,1] \to U$, $\beta_x(0) = P$ und $\beta_x(1) = x$ eine zweite solche Kurve, so definieren wir die geschlossene Kurve $\gamma : [0,2] \to U$ durch

$$\gamma(t) \;=\; \begin{cases} \alpha_x(t) & 0 \le t \le 1 \\ \beta_x(2-t) & 1 \le t \le 2\,. \end{cases}$$

Dann ist $\gamma(0) = \gamma(2) = P$. Mit (ii) und Satz 2,

$$0 = \int_\gamma f \;=\; \int_{\alpha_x} f \;+\; \int_{\beta_x^-} f \;=\; \int_{\alpha_x} f \;-\; \int_{\beta_x} f\,.$$

Wir führen deshalb die abkürzende Schreibweise ein:

$$\varphi(x) \;:=\; \int_P^x f\,, \quad x \in U\,.$$

Damit wird

$$\varphi(x + he_j) \;=\; \int_P^{x+he_j} f \;=\; \int_P^x f \;+\; \int_x^{x+he_j} f$$

so dass

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) \;=\; \int_x^{x+he_j} f\,.$$

Das Integral rechts hängt nicht ab von der Wahl der Kurve, die x mit $x+he_j$ in U verbindet. Zur Berechnung wählen wir eine **spezielle Kurve** (Strecke) : $\alpha(t) = x + the_j$, $0 \leq t \leq 1$. Es gilt dann $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = x + he_j$. Es folgt

$$\langle f(\alpha(t))\,,\,\dot{\alpha}(t)\rangle \;=\; \langle f(\alpha(t))\,,\,he_j\rangle \;=\; h\langle f(\alpha(t)), e_j\rangle = hf_j(\alpha(t))\,.$$

Daher

$$\int\limits_x^{x+he_j} f \;=\; \int\limits_\alpha f \;=\; h\int\limits_0^1 f_j(x+the_j)dt$$

und deshalb

$$\frac{1}{h}\left[\varphi(x+he_j) - \varphi(x)\right] \;=\; \int\limits_0^1 f_j(x+the_j)dt\,.$$

Nach Voraussetzung ist f_j stetig, und wir schliessen

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\varphi(x+he_j) - \varphi(x)\right] \;=\; f_j(x)\,.$$

Dies gilt für jedes $x \in U$ und jedes $1 \leq j \leq n$. Wir haben gezeigt, dass $\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x) = f_j(x)$ für $1 \leq j \leq n$. Da f_j stetig für $1 \leq j \leq n$, so folgt $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$. Weil $\nabla\varphi(x) = f(x)$ haben wir ein Potential für f gefunden.

$\square$

Das Kriterium (Theorem 1) ist unpraktisch. Wir suchen ein besseres, welches nur lokale Bedingungen an f und globale Bedingungen an U stellt.

Definition. *Ein stetig differenzierbares Kraftfeld* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *(resp. 1–Form* ω *) heisst*

exakt $\iff$ $f = \nabla\varphi\,,\ \varphi \in C^2(U)$
(resp. $\omega = d\varphi$*) .*

geschlossen $\iff$ *Es gelten die* ***Integrabilitätsbedingungen***

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \;=\; \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)}$$

alle $x \in U$ *, alle* i, j *.*

Satz 4. $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen*

$$f \quad \textit{exakt} \quad \Longrightarrow f \quad \textit{geschlossen}.$$

Beweis. (Satz von Schwarz) Nach Voraussetzung ist $f_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$, $1 \leq i \leq n$. Daher

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \;=\; \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x)\,.$$

□

Die Umkehrung gilt nicht. Aus f geschlossen folgt nicht, dass f exakt ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

Bespiel $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$
Definiere das Kraftfeld f auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ durch

$$f(x,y) \;:=\; \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,,\, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \;=\; (f_1(x,y), f_2(x,y))\,.$$

f ist geschlossen, da

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) \;=\; \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) \;=\; \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Wir zeigen, dass f nicht exakt ist auf U. Betrachte den Weg

$$\gamma \;:\; [0,\tau] \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,$$

$$\gamma(t) \;=\; (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \;:=\; (r\,\cos\,t\,,\, r\,\sin\,t)\,,\, r > 0\,.$$

Dann ist, mit $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\begin{aligned} \langle f(\gamma(t))\,,\, \dot\gamma(t) \rangle \;&=\; \frac{-r\,\sin\,t}{r^2}(-r\,\sin\,t) + \frac{r\,\cos\,t}{r^2}(r\,\cos\,t) \\ &=\; (\sin\,t)^2 + (\cos\,t)^2 \;=\; 1 \end{aligned}$$

und deshalb

$$\int_\gamma f \;=\; \int_0^\tau 1dt \;=\; \tau\,.$$

Das Wegintegral ist also gleich dem Winkel τ, unabhängig vom Radius $r > 0$. Für $\tau = 2\pi$ parametrisiert γ den Kreis vom Radius r, ist also eine geschlossene Kurve in U, und

$$\int_\gamma f \;=\; 2\pi\,.$$

Wäre f exakt, d.h. $f = \nabla\varphi$ für eine Funktion von $\varphi : U \to \mathbb{R}$, so wäre, nach Satz 3,

$$\int_\gamma f \;=\; 0\,.$$

Das Kraftfeld f ist also geschlossen und nicht exakt! Das Gebiet $\mathbb{R}^2\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ hat ein Loch!. Wir müssen zusätzliche Bedingungen an das Gebiet U stellen, um schliessen zu können: f exakt auf $U \Leftrightarrow f$ geschlossen auf U. Wir betrachten zuerst einen Spezialfall.

Definition. *Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst **sternförmig bezüglich** des Punktes $P \in U$, falls*

$$x \in U \Longrightarrow \{(1-t)P + tx \mid 0 \le t \le 1\} \subset U\,.$$

Beispiele Eine offene Kugel oder eine konvexe Menge ist sternförmig bezüglich jedes Punktes der Menge. $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ ist **nicht** sternförmig.

Theorem 2. (H. Poincaré)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Dann gilt auf U

$$f \;\; (\textit{resp. } \omega) \;\; \textit{geschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad f \;\; (\textit{resp. } \omega) \;\; \textit{exakt}\,.$$

Beweis. $(\Longleftarrow)$ dies ist Satz 4.
$(\Longrightarrow)$
Zu zeigen: es gibt eine Funktion $\varphi \in C^2(U,\mathbb{R})$ so dass $f(x) = \nabla\varphi(x)$, $x \in U$. Sei $x \in U$, nehme den Weg α_x, der P mit x in U verbindet

$$\alpha_x(t) \;=\; P + t(x-P)\,, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

(U ist sternförmig bezüglich P!), und definiere $\varphi : U \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) \;:=\; \int_{\alpha_x} f\,, \quad x \in U\,.$$

Nehme zunächst an, dass $P = 0$ ist und rechne aus:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{\alpha_x} f = \int_0^1 \langle f(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle f(tx), x\rangle dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{s=1}^n f_s(tx)\cdot x_s \right) dt\,.
\end{aligned}$$

Mit der Produktregel, den Integrabilitätsbedingungen und dem Hauptsatz folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \left\{ \sum_{s=1}^n t\frac{\partial f_s}{\partial x_j}(tx)\cdot x_s + f_j(tx) \right\} dt \\
&= \int_0^1 \left\{ \sum_{s=1}^n t\frac{\partial f_j}{\partial x_s}(tx)\cdot x_s + f_j(tx) \right\} dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}[tf_j(tx)]dt \\
&= f_j(x)\ .
\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes j und $x \in U$ so dass $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R})$ weil $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Überdies $f(x) = \nabla\varphi(x)$, $x \in U$. Falls $P \in U$, so erhalten wird das Potential φ genau gleich durch die Formel:

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle f(P + t(x-P)), x - P\rangle dt\,.$$

$\square$

Unter den Voraussetzungen von Theorem 2 wissen wir jetzt (Theorem 1), dass das Wegintegral unabhängig von der Wahl des Wegen γ_x ist, der P mit x in U verbindet. Um geeignete Formeln für das Potential $\varphi(x)$ zu finden, kann man günstige Wege wählen.! Sei zum Beispiel $U = \mathbb{R}^n$ und f geschlossen. Dann ist U sternförmig, insbesondere bezüglich $P = 0$. Wählen wir den speziellen Weg γ_x von 0 parallel zu den

Koordinatenachsen zum Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, so erhalten wir die Formel:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int\limits_{\gamma_x} f \\
&= \int\limits_0^{x_1} f_1(t, 0, \dots, 0)dt \\
&\quad + \int\limits_0^{x_2} f_2(x_1, t, 0, \dots, 0)dt \\
\dots &\quad + \int\limits_0^{x_n} f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)dt\,.
\end{aligned}$$

Definition. (Homotopie)
Zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ mit gemeinsamem Anfangspunkt A und gemeinsamem Endpunkt B heissen ***homotop*** *in U, falls es eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

$$\left.\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma_0(t) \\ H(t,1) &= \gamma_1(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{alle} \;\; a \le t \le b$$

$$\left.\begin{aligned} H(a,s) &= A \\ H(b,s) &= B \end{aligned}\right\} \quad \text{alle} \;\; 0 \le s \le 1\,.$$

Für jedes feste $s \in [0, 1]$ definiert $\gamma_s(t) := H(t, s)$ eine stetige Kurve in U, die A mit B verbindet.

Abkürzung für homotop:

$$\gamma_0 \simeq \gamma_1 \;\; \text{in} \;\; U\,.$$

Theorem 3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $A, B \in U$ und γ_0, γ_1 zwei stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurven, die beide den Punkt A mit dem Punkt B in U verbinden. Falls $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ in U, so gilt*

$$\int\limits_{\gamma_0} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega\,,$$

für jede ***geschlossene*** *1–Form ω in U.*

Beweis. (H. Poincaré) Sei $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von offenen Kugeln B_λ, die U überdecken. Sei $H : R \to U$, $R = [a,b] \times [0,1]$, eine Homotopie. Wir zeigen zuerst, dass es Zerlegungen

$$Z \ : \ a \ = \ t_0 < t_1 < \cdots < t_k \ = \ b$$

$$Z' \ : \ 0 \ = \ s_0 < s_1 < \cdots < s_q \ = \ 1$$

gibt mit der Eigenschaft, dass das Bild jedes Rechtecks $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ unter der Abbildung H ganz in **einer** Kugel aus $\mathcal{B}$ liegt. Nehme an, es gebe keine solchen Zerlegungen. Für jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ unterteilen wir dann $[a,b]$ und $[0,1]$ in jeweils m gleich lange Intervalle und damit das Rechteck R im m^2 gleiche Teilrechtecke. Zu jedem m existiert eines dieser Rechtecke R_m, dessen Bild $H(R_m)$ in keiner Kugel aus $\mathcal{B}$ enthalten ist. Betrachte die Folge der Mittelpunkte x_m dieser Rechtecke R_m, $m = 1, 2, \ldots$. Da R kompakt ist, so konvergiert eine Teilfolge von $\{x_m\}$ gegen einen Punkt $x_0 \in R$. Sei $B_0 \in \mathcal{B}$ eine Kugel, die $H(x_0)$ enthält. Dann ist $H^{-1}(B_0)$ eine offene Umgebung von x_0 in R. Diese enthält offensichtlich unendlich viele der Rechtecke R_m, deren Bilder $H(R_m)$ in B_0 liegen, im Widerspruch zur Konstruktion.
Es seien nun Z, Z' Zerlegungen von $[a,b]$ bzw. $[0,1]$ mit der Eigenschaft, dass jedes Teilrechteck $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ durch H ganz in eine Kugel aus $\mathcal{B}$ hinein abgebildet wird. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} P_{ij} \ &:= \ H(t_i, s_j) \\ \Gamma_{ij} \ &:= \ \text{Strecke von } P_{ij} \text{ nach } P_{i+1,j} \\ \sigma_{ij} \ &:= \ \text{Strecke von } P_{ij} \text{ nach } P_{ij+1}\,. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion liegen die vier Punkte P_{ij}, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$ und $P_{i+1,j+1}$ in einer Kugel aus $\mathcal{B}$. Wegen der Konvexität dieser Kugel verlaufen die vier Strecken Γ_{ij}, $\Gamma_{i,j+1}$, σ_{ij} und $\sigma_{i+1,j}$ in dieser Kugel. Nach Theorem 2 (Poincaré) ist ω in der Kugel exakt. Deshalb sind die Integrale von ω längs $\Gamma_{ij} + \sigma_{i+1,j}$ und $\sigma_{ij} + \Gamma_{i,j+1}$ gleich, weil sie dieselben Punkte in der Kugel verbinden. Mit der Abkürzung $I(\alpha) = \int_\alpha \omega$ folgt somit

$$I(\Gamma_{ij}) - I(\Gamma_{i,j+1}) \ = \ I(\sigma_{ij}) - I(\sigma_{i+1,j})\,.$$

Addiere, mit $I_j := \sum\limits_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{ij})$ folgt

$$I_j - I_{j+1} \ = \ I(\sigma_{0j}) - I(\sigma_{kj})\,.$$

Weil σ_{0j} und σ_{kj} Strecken von A nach A bzw. von B nach B sind, haben beide Integrale $I(\sigma_{0j})$ und $I(\sigma_{kj})$ den Wert 0. Deshalb ist $I_j = I_{j+1}$ für $j = 0, 1, 2, \ldots, q-1$, und es folgt

$$\sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{i0}) \;=\; I_0 \;=\; I_q \;=\; \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{iq})\,.$$

Schliesslich müssen wir den Bezug zu den Integralen $\int_{\gamma_0} \omega$ und $\int_{\gamma_1} \omega$ herstellen. Die Strecken Γ_{i0} und die Teilkurve $\gamma_{i0} := \gamma_0 \mid [t_i, t_{i+1}]$ haben denselben Anfangspunkt P_{i0} und denselben Endpunkt $P_{i+1,0}$. Da beide in einer Kugel aus $\mathcal{B}$ liegen, folgt aus Theorem 2, dass $\int_{\gamma_{i0}} \omega = I(\Gamma_{i0})$. Summation über i liefert

$$\int_{\gamma_0} \omega \;=\; \sum_{i=0} I(\omega_{i0}) \;=\; I_0\,.$$

Genau gleich zeigt man

$$\int_{\gamma_1} \omega \;=\; \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{iq}) \;=\; I_q\,.$$

Mit $I_0 = I_q$ ist der Satz bewiesen.

$\square$

Definition. (Homotopie von Loops) *Zwei geschlossene Kurven* $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^2$ *heissen frei homotop in* U, *wenn es eine stetige Abbildung* $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ *gibt, mit*

$$\left.\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma_0(t) \\ H(t,1) &= \gamma_1(t) \end{aligned}\right\} \quad \textit{alle} \;\; a \le t \le b\,.$$

$$H(a,s) \;=\; H(b,s) \qquad \textit{alle} \;\; 0 \le s \le 1\,.$$

Abkürzung: $\gamma_0 \simeq \gamma_1$

Alle Kurven γ_s, $\gamma_s(t) := H(t,s)$ verlaufen also in U und sind geschlossen.

Genau gleich wie Theorem 3 beweist man

Theorem 4. (Homotopie von Loops)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien γ_0, γ_1 zwei geschlossene Loops in U, stetig und stückweise stetig differenzierbar. Falls $\gamma_0 \simeq \gamma_1$, so gilt

$$\int_{\gamma_0} \omega \; = \; \int_{\gamma_1} \omega$$

*für jede **geschlossene** 1–Form ω auf U.*

Um den Hauptsatz über die Existenz von Potentialen von geschlossenen 1–Formen zu formulieren, brauchen wir den Begriff einer einfach zusammenhängenden offenen Menge.
Unter einer Punktkurve in $\mathbb{R}^n$ verstehen wir eine konstante Abbildung $I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto P(t) = P$, die alle Punkte des Intervalls I auf den Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ abbildet. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_P \omega \; &= \; \int_a^b \omega(P)[\dot{P}(t)]dt \\ &= \; \int_a^b \omega(P)[0]dt \; = \; 0 \end{aligned}$$

für jede 1–Form ω. Eine geschlossene Kurve γ in U welche homotop in U zu einer Punktkurve ist, nennt man **null–homotop** in U, in Zeichen $\gamma \simeq 0$.

Definition. (Einfacher Zusammenhang)
*Eine offene und zusammenhängende Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst einfach zusammenhängend, wenn **jede geschlossene** stetige Kurve γ in U null–homotop in U ist, d.h. $\gamma \simeq 0$.*

Beispiel: Die offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei sternförmig bezüglich $P \in U$. Dann ist jeder stetige Loop γ in U homotop zur Punktkurve P; eine Homotopie ist gegeben durch

$$H(t,s) \; = \; sP + (1-s)\gamma(t)\,, \quad 0 \leq s \leq 1\,.$$

Die gelochte Ebene $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ hingegen ist nicht einfach zusammenhängend, wie wir beweisen werden. Die Antwort auf die Frage: Wann ist ein Kraftfeld ein Potentialfeld? lautet jetzt folgendermassen:

Theorem 5. (Existenz von Potentialen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend. Dann gilt:

$$\omega \quad (\textit{resp.} \quad f\,) \quad \textit{geschlossen in} \quad U\,.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\omega \;=\; d\varphi \quad (\textit{resp.} \quad f \;=\; \nabla\varphi\,) \;\textit{für eine}$$
$$\textit{Funktion} \quad \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Beweis. (Theorem 1 und Theorem 4) Sei ω eine geschlossene 1–Form und γ eine geschlossene Kurve in U. Dann ist $\gamma \simeq P$ in U (konstanter Loop) und es folgt aus Theorem 4, dass

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_P \omega \;=\; 0\,.$$

Dies gilt für jede geschlossene Kurve γ und deshalb ist $\omega = d\varphi$ exakt, nach Theorem 1.

□

Für eine einfach zusammenhängede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt also

$$\int_\gamma \omega \;=\; 0\,,$$

falls ω eine geschlossene 1–Form und γ eine geschlossene Kurve in U ist. Es folgt zum Beispiel, dass $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist; denn die 1–Form ω auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$,

$$\omega(x,y) \;=\; \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

ist, wie wir wissen, geschlossen und das Integral über den Kreis

$$\gamma(t) = (r\,\cos\,t\,,\; r\,\sin\,t)\,,\;\; 0 \le t \le 2\pi\,,\;\; r > 0\,,$$

$$\int_\gamma \omega \;=\; 2\pi$$

verschwindet nicht.

2. Tansformation von 1–Formen, pull–back

$U \subset \mathbb{R}^n$ sei offen.

$$\begin{aligned}\Lambda^1(U) \ : &= \ \{\text{Vektorraum der } 1\text{–Formen auf } U\} \\ &= \ \{\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\}\,.\end{aligned}$$

Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, und sei

$$u \ : \ V \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n\,, \quad y \longmapsto u(y)$$

eine C^1–Abbildung. Dann ist $du(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ linear für jedes $y \in V$, und wir können den pull–back

$$u^* \ : \ \Lambda^1(U) \longrightarrow \Lambda^1(V)\,, \quad \omega \longmapsto u^*\omega$$

folgendermassen definieren.

Definition. ***(pull–back)***
Sei $\omega \in \Lambda^1(U)$. Dann ist $u^*\omega \in \Lambda^1(V)$ definiert durch

$$(u^*\omega)(y)\cdot[w] \ = \ \omega(u(y))[du(y)w]\,,$$

alle $w \in \mathbb{R}^k$, in jedem Punkt $y \in V$.

Es ist also $u^*\omega(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ und somit ist die Abbildung $u^*\omega : V \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ ein Element aus $\Lambda^1(V)$.

Satz 5. ***Transformationsformel***
Sei $\gamma : [a,b] \to V \subset \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Kurve und $u \circ \gamma : [a,b] \to U$ die Bildkurve unter der Abbildung u, dann gilt

$$\int_{u\circ\gamma} \omega \ = \ \int_{\gamma} u^*\omega$$

für alle $\omega \in \Lambda^1(U)$.

Beweis. (Kettenregel) Zur Erinnerung: das Wegintegral der 1–Form ω längs des Weges $\alpha : [a,b] \to U$ ist definiert durch die Formel

$$\int_{\alpha} \omega \ := \ \int_a^b \omega(\alpha(t))[\dot{\alpha}(t)]dt\,.$$

Nach Definition von u^* und Kettenregel:

$$\begin{aligned} u^*\omega(\gamma(t))[\dot\gamma(t)] &= \omega(u(\gamma(t)))\cdot[du(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)] \\ &= \omega((u\circ\gamma)(t))\cdot\left[\tfrac{d}{dt}(u\circ\gamma)(t)\right] . \end{aligned}$$

Integration von beiden Seiten über $a \le t \le b$ liefert die Formel.

$\square$

Bemerkung: Im Spezialfall $k = 1$ betrachten wir die stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\omega \in \Lambda^1(U)$, dann ist $\gamma^*\omega \in \Lambda^1[0,1]$ gegeben durch

$$\gamma^*\omega(t) \;=\; \omega(\gamma(t))\cdot[\dot\gamma(t)]dt\,,$$

und wir können das Linienintegral schreiben in der Form

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_0^1 \gamma^*\omega\,.$$

Zur **Darstellung** des pull–back in den Koordinatenfunktionen setzen wir

$$\omega(x) \;=\; \sum_{j=1}^n f_j(x)dx_j\,, \quad x \in U\,,$$

und

$$(u^*\omega)(y) \;=\; \sum_{j=1}^k \widehat{f}_j(y)dy_j\,, \quad y \in V\,.$$

Für die Kraftvektoren $f = (f_1,\ldots,f_n)$ und $\widehat{f} = (\widehat{f}_1,\ldots,\widehat{f}_k)$ gilt dann

$$\boxed{\widehat{f}(y) \;=\; du(y)^T\ (f\circ u)(y)}\,, \qquad y \in V\,,$$

wobei T die transponierte Matrix andeutet. Der Beweis folgt sofort aus der Definition des pull–backs: Es gilt für alle $w \in \mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned} (u^*\omega)(y)[w] &= \langle \widehat{f}(y), w\rangle \\ &= \omega(u(y))[du(y)w] \\ &= \langle f(u(y))\,,\, du(y)w\rangle \\ &= \langle du(y)^T f(u(y)), w\rangle\,, \end{aligned}$$

und die Formel folgt.

3. Transformation des Gradienten

Im Gegensatz zur Ableitung einer Funktion erfordert die Definition des Gradienten einer Funktion eine zusätzliche Struktur, nämlich ein Skalarprodukt, dessen Darstellung sich bei Koordinatentransformationen ändert. Sei im folgenden

$$u \;:\; V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

ein C^1–Diffeomorphismus. Bisher hatten wir an jedem Punkt $U \subset \mathbb{R}^n$ das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ genommen. Der Diffeomorphismus $u : V \to U$ induziert im Punkt $y \in V$ ein Skalarprodukt $g(y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(y)(w_1, w_2) \;:=\; \langle du(y)w_1, du(y)w_2 \rangle \,,$$

für $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$. Für jedes $y \in V$ fest, ist $g(y)$ eine positive definite symmetrische Bilinearform, gegeben durch die symmetrische Matrix

$$S(y) \;:=\; du(y)^T \cdot du(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \,,$$

so dass

$$g(y)(w_1, w_2) \;=\; \langle S(y)w_1, w_2 \rangle \,.$$

Sei nun $\psi : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann ist der Gradient von ψ bezüglich des induzierten Skalarproduktes, $\nabla^g \psi(y)$, definiert durch

$$d\psi(y)[w] \;=\; g(y)(\nabla^g \psi(y), w)$$

für alle $w \in \mathbb{R}^n$. Zur Berechnung von $\nabla^g \psi(y)$ beobachten wir:

$$\begin{aligned} d\psi(y)[w] &= \langle du(y)\nabla^g \psi(y) \,,\, du(y)w \rangle \\ &= \langle du(y)^T du(y)\nabla^g \psi(y) \,,\, w \rangle \\ &= \langle S(y)\nabla^g \psi(y) \,,\, w \rangle \\ &= \langle \nabla \psi(y) \,,\, w \rangle \,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\boxed{\nabla^g \psi(y) \;=\; S(y)^{-1} \cdot \nabla \psi(y) \,, \quad y \in V \,,} \qquad y \in V \,,$$

mit den Gradienten $\nabla\psi(y)$ bezüglich des Euklidischen Skalarproduktes in $\mathbb{R}^n$.
Falls $du(y)^T du(y) = \mathbf{1}$, d.h. falls $du(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine **orthogonale** Matrix ist, so folgt $g(y)(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle$ und $\nabla^g\psi(y) = \nabla\psi(y)$.
Sei nun

$$\varphi \ : \ U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, und $u : V \to U$ ein Diffeomorphismus. Dann ist die transformierte Funktion die Komposition

$$\varphi\circ u \ : \ V \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad y \longmapsto \varphi(u(y))\,.$$

Der Gradient in V bezüglich des induzierten Skalarproduktes ist dann definiert durch

$$d(\varphi\circ u)(y)[w] \ = \ g(y)\left(\nabla^g(\varphi\circ u)(y), w\right)\,.$$

Mit der Kettenregel und der Definition des induzierten Skalarproduktes erhalten wir

$$\begin{aligned} d((\varphi\circ u)(y)[w] &= d\varphi(u(y))\cdot du(y)\cdot w \\ &= \langle \nabla\varphi(u(y))\,,\, du(y)w \rangle \\ &= \langle du(y)\nabla^g(\varphi\circ u)(y)\,,\, du(y)w \rangle\,. \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $w \in \mathbb{R}^n$, und wir schliessen

$$\boxed{\nabla^g(\varphi\circ u)(y) \ = \ du(y)^{-1}\cdot(\nabla\varphi)\circ u(y)\,.}$$

Der Gradient einer Funktion transformiert sich also tatsächlich wie ein Vektorfeld. Dies ist im Gegensatz zu den Komponenten $\nabla(\varphi\circ u)$ der 1–Form $d(\varphi\circ u)$ auf V, definiert durch $d(\varphi\circ u)(y)[w] = \langle \nabla(\varphi\circ u)(y), w \rangle$, für welche gilt:

$$\boxed{\nabla(\varphi\circ u)(y) \ = \ du(y)^T\,(\nabla\varphi)\circ u(y)\,.}$$

4. Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve in $\mathbb{R}^2$

Nehme die geschlossene 1–Form auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$:

$$\omega(x,y) \;:=\; \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\,.$$

Für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega \in \mathbb{Z}\,,$$

eine ganze Zahl. Sie misst die **Anzahl der Umläufe** der Kurve γ um den Punkt 0 und ist eine Homotopieinvariante für geschlossene Kurven in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, nach Theorem 4.
Als Uebungsaufgabe zeigt man nämlich sofort für $\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ (dargestellt in Polarkoordinaten mit einem stetigen Argument $\varphi(t)$), dass das Integral

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_0^1 \dot\varphi(t)dt \;=\; \varphi(1)-\varphi(0)$$

die Aenderung des Winkels beim Durchlaufen der Kurve ist. Aus $\gamma(0) = \gamma(1)$ schliessen wir $r(0) = r(1)$ und $\varphi(1) = \varphi(0) + 2\pi n$, für ein $n \in \mathbb{Z}$.
Zum Beispiel, für den m–fach durchlaufenen Kreis $\gamma(t) := re^{i2\pi mt}$, $r > 0$, $0 \le t \le 1$, erhält man

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega \;=\; m\,.$$

Allgemeiner:
Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve und $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, nicht im Bild der Kurve, das heisst

$$P \;\notin\; \gamma([0,1])\,.$$

Definition. *Die **Umlaufzahl** der Kurve γ um den Punkt P ist die **ganze Zahl***

$$n(\gamma;P) \;:=\; n(\gamma - P, 0) \;\in\; \mathbb{Z}\,.$$

*Wir beschreiben zwei topologische **Anwendungen** der Umlaufzahl in $\mathbb{R}^2$.*

Sei $D = \{z \,\big|\, |z| \le 1\}$ *die* ***abgeschlossene Kreisscheibe*** *in* $\mathbb{R}^2$ *und sei*

$$\partial D \;=\; \{z \,\big|\, |z| = 1\} \;=\; \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

der ***Rand*** *von* D *, in komplexer Notation.*

Satz 6. (Retraktion)
Es gibt ***keine stetige*** *Abbildung* $h : D \to \partial D$ *mit* $h(z) = z$ *für alle* $z \in \partial D$ *.*

> *"Man kann die Kreisscheibe nicht stetig auf den Rand zurückziehen bei* ***punktweise*** *festgehaltenem Rand."*

Beweis. (Homotopie–Invarianz der Umlaufzahl) Widerspruch. Nehme an, es gibt eine Abbildung h wie im Satz. Dann kann man die stetige Abbildung

$$H \;:\; [0, 2\pi] \;\times\; [0,1] \longrightarrow \partial D$$

definieren durch:

$$H(t,s) \;:=\; h(se^{it})\,.$$

H ist eine Homotopie in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ der **geschlossenen** Kurven γ_0 und γ_1 :

$$\gamma_0(t) \;:=\; H(t,0) \;=\; h(0) \;=\; P$$

$$\gamma_1(t) \;:=\; H(t,1) \;=\; h(e^{it}) \;=\; e^{it}$$

($h(z) = z$ für $z = e^{it}$ **nach** Voraussetzung.)
Weil $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und ω geschlossen auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, folgt nach Theorem 4,

$$n(\gamma_0, 0) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_0} \omega \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_1} \omega \;=\; n(\gamma_1, 0)\,.$$

Aber: $n(\gamma_0, 0) \;=\; 0$ (**Punkt**kurve) und $n(\gamma_1, 0) \;=\; 1$ (Kreis), Widerspruch.

□

Folgerung: Qualitativer Fixpunktsatz von Brouwer.

Theorem 6. (Fixpunktsatz von Brouwer) ***Jede*** *stetige Abbildung* $f : D \to D$ *der* ***abgeschlossenen*** *Kreisscheibe* $D \subset \mathbb{R}^2$ ***in*** *sich, besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Bemerkung: Der Satz gilt dann natürlich für jedes abgeschlossene Gebiet in $\mathbb{R}^2$ homöomorph zu D in $\mathbb{R}^2$. Es wird nicht verlangt, dass f eine Kontraktion ist! **Kein** konstruktives Resultat. **Falsch**, wenn man zum Beispiel einen Punkt in D wegnimmt:

$$f : D \backslash \{0\} \longrightarrow D \backslash \{0\} \; : \; f(z) \; := \; -z$$

hat keinen Fixpunkt. (Das Theorem von Brouwer gilt übrigens für abgeschlossene Kugeln in $\mathbb{R}^n$, für **jedes** n!)

Beweis. (Satz 5) Nehme an, dass $f : D \to D$ **keinen** Fixpunkt besitzt, das heisst $f(z) \neq z$ für alle $z \in D$. Dann können wir eine stetige Abbildung $h : D \to \partial D$ mit $h(z) = z$ auf ∂D folgendermassen definieren:

Nehme die Gerade durch die zwei Punkte $f(z)$ und z. Definiere $h(z)$ als denjenigen Schnittpunkt mit ∂D, für den gilt

$$h(z) - f(z) \; = \; \lambda(z - f(z)) \, , \quad \lambda > 0 \, .$$

Es ist dann also $h(z) \in \partial D$ für alle z und $h(z) = z$ für alle $z \in \partial D$, im **Widerspruch** zu Satz 5.

□

27. Mai 2003