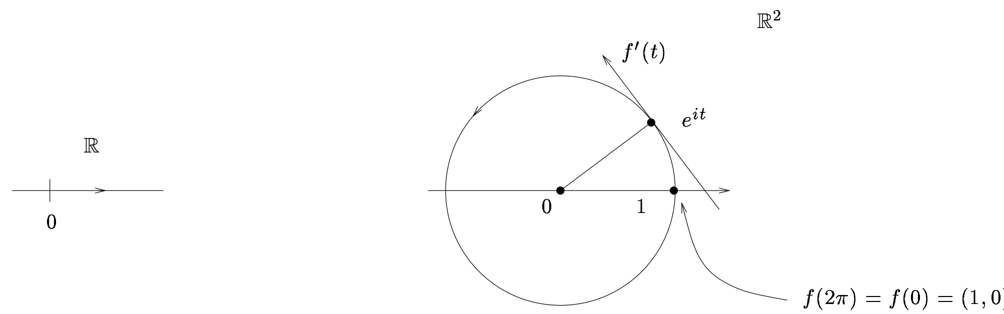
VII.8. Schrankensatz für $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Beispiel.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, \\ t \mapsto f(t) &= e^{it} = \cos(t) + i\sin(t). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f'(t) &= \cos'(t) + i\sin'(t) \\ &= -\sin(t) + i\cos(t) = ie^{it} \\ \Rightarrow \|f'(t)\| &= \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 \end{aligned}$$

Diese Beispiel zeigt, dass der Mittelwertsatz in der Form von Theorem 6 nicht gilt:

$$\begin{aligned} f(2\pi) - f(0) &= 1 - 1 = 0 \\ &\neq f'(\tau)(2\pi - 0), \quad 0 < \tau < 2\pi \end{aligned}$$

da ja $f'(\tau) \neq 0$ für alle τ. Hingegen:

Satz 21. *(Schrankensatz). Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Falls $\|f'(t)\| \leq M$ für alle $a < t < b$, dann*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M|b-a|,$$

wobei $\| \, \|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis. (Theorem 6) Kürze ab:

$$V := f(b) - f(a) \in \mathbb{R}^n.$$

Definiere

$$\cancel{t \mapsto} \varphi(t) := \langle V, f(t) \rangle = \sum_{j=1}^{n} V_j f_j(t).$$

Nach Theorem 6 existiert ein $a < \tau < b$, so dass

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= (b-a)\varphi'(\tau) \\ &= (b-a)\langle V, f'(\tau)\rangle. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= \langle V, f(b)\rangle - \langle V, f(a)\rangle \\ &= \langle V, f(b) - f(a)\rangle = \langle V, V\rangle \\ &= \|V\|^2. \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Schwarz

$$\|V\|^2 = (b-a)\langle V, f'(\tau)\rangle \leq (b-a)\|V\|\,\|f'(\tau)\|.$$

Nehme an $\|V\| \neq 0$, dividiere

$$\|V\| \leq |b-a|\,\|f'(\tau)\| \quad \text{für ein } a < \tau < b.$$

$\square$