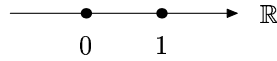


V.9 ZUSAMMENHÄNGENDE METRISCHE RÄUME.

Im folgenden bezeichnen wir mit Z den diskreten metrischen Raum, welcher aus den zwei Punkten $\{0, 1\}$ besteht und dessen Metrik die von \mathbb{R} induzierte Abstandsmetrik ist.



Der metrische Raum Z ist ein Beispiel eines nicht zusammenhängenden Raumes.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **zusammenhängend**, falls jede stetige Funktion $f : X \rightarrow Z$ konstant ist. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls der metrische Raum (A, d_A) mit der induzierten Metrik $d_A = d$ zusammenhängend ist.

Satz 9.1. (Äquivalente Definitionen) Im metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) (X, d) ist zusammenhängend.
- (ii) X ist nicht die Vereinigung von zwei disjunkten, nicht leeren offenen Mengen von X , d. h. sind U_0 und U_1 offene Mengen in X mit $X = U_0 \cup U_1$ und $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ dann folgt $U_0 = \emptyset$ oder $U_1 = \emptyset$.
- (iii) X ist nicht die Vereinigung von zwei disjunkten, nicht leeren, abgeschlossenen Mengen von X ; d. h. sind F_0 und F_1 abgeschlossene Mengen in X mit $X = F_0 \cup F_1$ und $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ dann folgt $F_0 = \emptyset$ oder $F_1 = \emptyset$.
- (iv) Falls $A \subset X$ sowohl offen als auch abgeschlossen in X ist, so folgt entweder $A = \emptyset$ oder $A = X$.

Beweis. Weil eine Teilmenge von X genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement in X offen ist, so folgt die Implikation (ii) \Leftrightarrow (iii) sofort und wir zeigen noch die Implikationen

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$$

Im Spezialfall $X = \emptyset$ sind alle vier Aussagen richtig und wir nehmen $X \neq \emptyset$ an.

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Sei (X, d) zusammenhängend und seien $U_0, U_1 \subset X$ zwei offene Mengen sodass $X = U_0 \cup U_1$ und $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Jeder Punkt $x \in X$ liegt also in genau einer der Mengen U_0 oder U_1 . Deshalb können wir eine Funktion $f : X \rightarrow Z$ definieren durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U_0 \\ 1 & x \in U_1. \end{cases}$$

In einem diskreten Raum ist jeder Punkt eine offene Teilmenge; insbesondere ist jeder der zwei Punkte in Z eine offene Teilmenge von Z . Die Urbilder in X unter der Abbildung f , nämlich $f^{-1}(0) = U_0$ und $f^{-1}(1) = U_1$ sind nach Annahme offen. Deshalb ist das Urbild unter f jeder offenen Menge in Z eine offene Menge in X und somit ist f stetig. Weil X zusammenhängend ist, muss f konstant sein. Es folgt entweder $f(x) = 0$ für alle $x \in X$, sodass $U_1 = \emptyset$ oder aber $f(x) = 1$ für alle $x \in X$, in welchem Fall $U_0 = \emptyset$ ist.

$$(ii) \Rightarrow (iv)$$

Sei $A \subset X$ offen und abgeschlossen. Dann ist $X = A \cup (X \setminus A)$ die disjunkte Vereinigung von zwei offenen Mengen. Wegen (ii) muss eine dieser Mengen leer sein. Daher gilt entweder $A = \emptyset$ oder $A = X$.

$$(iv) \Rightarrow (i)$$

Nehme an, dass (iv) gilt. Sei $f : X \rightarrow Z$ eine stetige Funktion. Wähle einen Punkt $x_0 \in X$ und definiere $z_0 := f(x_0) \in Z$. Die Menge $\{z_0\} \subset Z$ ist sowohl abgeschlossen wie offen. Da f stetig ist, so ist auch die Menge $A = f^{-1}(z_0)$ offen und abgeschlossen. Überdies ist $A \neq \emptyset$ weil $x_0 \in A$, und es folgt $A = X$ aus der Annahme (iv). Dies bedeutet, dass $f(x) = z_0$ für alle $x \in X$ sodass also f eine konstante Funktion ist. Damit ist Satz 9.1 bewiesen.

□

Definition. (Intervalle) Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ heisst ein Intervall, falls für je drei Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x, y \in I \text{ und } x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I$$

Die Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall genau dann falls sie eine der folgenden 6 Bedingungen erfüllt:

- (i) $I \neq \emptyset$
- (ii) I enthält genau eine reelle Zahl.
- (iii) es gibt zwei reelle Zahlen $a < b$ sodass $I = (a, b)$
- (iv) es existieren $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sodass $a < b$ und $I = (a, b)$
- (v) es existieren $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}$ sodass $a < b$ und $I = (a, b]$
- (vi) es existieren $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sodass $a < b$ und $I = [a, b)$

Zum Beweis im Falle $I \neq \emptyset$ definiert man $a = \inf I \in \overline{\mathbb{R}}$ und $b = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}$.

Satz 9.2. (Zusammenhängende Mengen in \mathbb{R}) Für eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- (i) I ist zusammenhängend
- (ii) I ist ein Intervall.

Beweis. (Satz 9.1)

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann zeigen wir, dass I nicht zusammenhängend ist. Wir nehmen also an, dass reelle Zahlen x, y, z existieren, sodass

$$x \leq y \leq z, \quad x, y \in I \quad \text{und} \quad z \notin I.$$

Die Teilmengen $U_0 = \{t \in I \mid t < z\}$ und $U_1 = \{t \in I \mid t > z\}$ sind disjunkt und offen in I . Weil $z \notin I$, gilt $I = U_0 \cup U_1$. Beide Mengen sind auch nicht leer, da ja $x \in U_0$ und $y \in U_1$. Daher ist I die disjunkte Vereinigung von zwei nicht leeren, offenen Teilmengen in I . Nach Satz 9.1 (ii) ist I daher nicht zusammenhängend.

$$(ii) \Rightarrow (i)$$

Sei I ein Intervall. Wir nehmen an (Widerspruch), dass I nicht zusammenhängend ist. Dann existiert nach Satz 9.1 eine Teilmenge $A \subseteq I$ welche sowohl abgeschlossen als auch offen ist in I und $A \neq \emptyset$ und $A \neq I$. Wähle zwei reelle Zahlen

$$a \in A, \quad b \in I \setminus A.$$

Wir können $a < b$ annehmen. Definiere

$$\beta := \sup\{x \in A \mid x \leq b\} \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $a \leq \beta \leq b$. Weil I ein Intervall ist und $a, b \in I$, so folgt $\beta \in I$. Nach der Definition des Supremums existiert eine Folge (x_n) in A mit $\beta = \lim x_n$. Weil $\beta \in I$ so konvergiert x_n in I gegen β . Daher gilt $\beta \in A$, weil A abgeschlossen in I ist. Nach Voraussetzung ist A auch offen in I und weil $\beta \in A$, so existiert daher ein $\varepsilon > 0$ sodass

$$I \cap (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \subset A.$$

Weil $b \geq \beta$ und $b \notin A$, so folgt somit $b \geq \beta + \varepsilon$. Daher ist $\beta < \beta + \frac{\varepsilon}{2} < b$. Da I ein Intervall ist, so folgt aus $\beta, b \in I$, dass $\beta + \frac{\varepsilon}{2} \in I$ ist. Dann gilt $\beta + \frac{\varepsilon}{2} \in I \cap (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ und somit $\beta + \frac{\varepsilon}{2} \in A$. Da aber $\beta + \frac{\varepsilon}{2} < b$, so widerspricht dies der Definition von β als dem Supremum. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme, dass das Intervall I nicht zusammenhängend ist, nicht zutrifft. Wir haben gezeigt, dass jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend ist.

□

Satz 9.3. (Bildmengen) Sei $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ stetig und sei $A \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge von X . Dann ist $f(A) \subset Y$ eine zusammenhängende Teilmenge von Y .

Beweis. (Satz 10) Sei $Z = \{0, 1\}$ der diskrete metrische Raum von 2 Elementen und sei $g : f(A) \rightarrow Z$ eine stetige Funktion. Dann ist auch (Satz 10) die Komposition $g \circ f : A \rightarrow Z$ stetig und somit ist $g \circ f$ konstant, weil ja A zusammenhängend ist. Daher existiert ein $z \in Z$ mit $g(f(x)) = z$ für alle $y \in f(A)$, sodass $g : f(A) \rightarrow Z$ eine konstante Funktion ist. Wir haben bewiesen, dass jede stetige Funktion $g : f(A) \rightarrow Z$ konstant ist. Nach Definition ist $f(A)$ also zusammenhängend.

□

Folgerung:

Theorem 9.1. (Zwischenwertsatz von Bolzano) Sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum und sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Seien $x, y \in X$ und $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) < a < f(y).$$

Dann existiert ein Punkt $\xi \in X$ mit $f(\xi) = a$.

Beweis. (Satz 9.2, Satz 9.3) Nach Satz 9.3 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend und deshalb nach Satz 9.2 ein Intervall. Somit gilt $a \in f(X)$ wie behauptet. □

Der Abschluss \bar{A} einer zusammenhängenden Menge A ist ebenfalls zusammenhängend. Es gilt allgemeiner:

Satz 9.4. Sei $A \subset (X, d)$ zusammenhängend. Dann ist jede Teilmenge $B \subset X$ mit

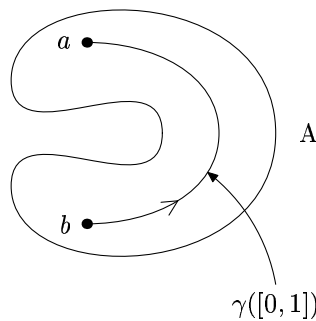
$$A \subset B \subset \bar{A}$$

zusammenhängend.

Beweis. (Satz 9.1 (ii)) Falls B nicht zusammenhängend ist, so existieren zwei nicht-leere offene Mengen U_0 und U_1 in B , so dass $B = U_0 \cup U_1$ und $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Weil A nach Annahme dicht ist in B , so sind die Mengen $U_0 \cap A$ und $U_1 \cap A$ nicht leer und offen in A . Es folgt $(U_0 \cap A) \cup (U_1 \cap A) = A$ und $(U_0 \cap A) \cap (U_1 \cap A) = \emptyset$ und daher ist nach Satz 9.1(ii) A nicht zusammenhängend, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist Satz 9.4 bewiesen. □

Der folgende stärkere Zusammenhangsbegriff ist etwas anschaulicher.

Definition. (Wegzusammenhängend) Ein metrischer Raum (X, d) heisst wegzusammenhängend, falls für je zwei Punkte $a, b \in X$ eine stetige Funktion $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ existiert mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$; d. h. also, dass je zwei Punkte in X durch einen stetigen Weg in X miteinander verbunden werden können. Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst entsprechend wegzusammenhängend, falls der metrische Raum (A, d_A) mit der induzierten Metrik $d_A = d$ wegzusammenhängend ist.



Satz 9.5. *Jeder Wegzusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei (X, d) wegzusammenhängend und sei $f : X \rightarrow Z$ eine stetige Funktion in den diskreten zweipunktigen Raum Z . Wähle $x_0 \in X$. Wir werden zeigen, dass $f(x) = f(x_0)$ ist für jedes $x \in X$, sodass nach Definition, X zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung existiert ein stetiger Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ welcher $x_0 = \gamma(0)$ und $x = \gamma(1)$ verbindet. Die Komposition $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow Z$ ist stetig. Weil das Intervall $[0, 1]$ nach Satz 9.2 zusammenhängend ist, so muss die Funktion $f \circ \gamma$ konstant sein, und es folgt

$$f(x) = f \circ \gamma(1) = f \circ \gamma(0) = f(x_0).$$

Dies gilt für jedes $x \in X$ sodass f konstant und daher X zusammenhängend ist. □

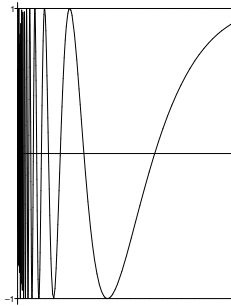
Nicht jeder zusammenhängende Raum ist wegzusammenhängend, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir definieren $A \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\}$$

Dann ist der Abschluss von A im Euklidischen Raum \mathbb{R}^2 die Menge

$$\bar{A} = A \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\},$$

anschaulich



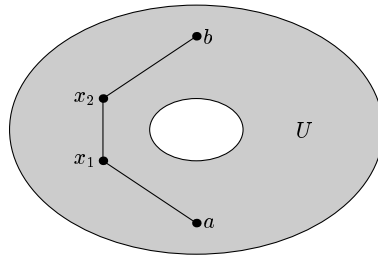
Die Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ ist wegzusammenhängend und deshalb ist \bar{A} nach Satz 9.5 und Satz 9.4 zusammenhängend. Es gibt aber keinen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{A}$ welcher $\gamma(0) = (0, 0)$ mit $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ in \bar{A} verbindet, \bar{A} ist also nicht wegzusammenhängend.

In \mathbb{R}^n gilt jedoch der folgende Satz.

Satz 9.6. (offene Mengen in normierten Räumen) *Jede zusammenhängende offene Menge $U \subset (X, \|\cdot\|)$ in einem normierten Raum (z. Bsp. im Euklidischen Raum \mathbb{R}^n) ist wegzusammenhängend. Es können sogar je zwei Punkte a und b in U durch einen Steckenzug in U miteinander verbunden werden, d. h. es gibt endlich viele Punkte $a = x_0, x_1, \dots, x_k = b$ in U , sodass jede Verbindungstrecke*

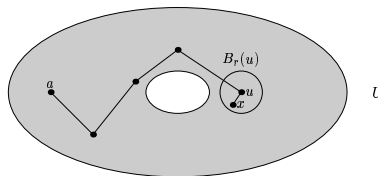
$$[x_{j-1}, x_j] = \{x_{j-1} + t(x_j - x_{j-1}) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

in U liegt.



Beweis. (Satz 9.1 (ii)) Wir halten $a \in U$ fest und definieren die Teilmengen $U_0 \subset U$ durch

$$U_0 := \{x \in U \mid \text{es gibt einen Streckenzug in } U \text{ von } a \text{ nach } x\}.$$



U_0 hat die folgenden zwei Eigenschaften (i) und (ii).

(i) U_0 ist offen.

Denn sei $u \in U_0$. Dann existiert eine offene Kugel $B_r(u)$ mit Zentrum u , welche ganz in U liegt, weil nach Annahme $U \subset X$ offen ist. Sei $x \in B_r(u)$ dann kann man den Streckenzug von a nach u ergänzen durch eine Strecke von u nach x in der offenen Kugel $B_r(u)$, sodass also $x \in U_0$. Deshalb gilt $B_r(u) \subset U_0$ und U_0 ist offen.

(ii) $U_1 = U \setminus U_0$ ist offen.

Sei $v \in U_1$, dann existiert eine offene Kugel $B_r(v) \subset U$. Sie liegt automatisch in $U \setminus U_0$, denn sonst träfe sie einen Punkt $u \in U_0$ und wir könnten somit v durch einen Streckenzug in U mit a verbinden, sodass $v \in U_0$ wäre. Somit ist U_1 offen.

Wegen (i) und (ii) ist $U = U_0 \cup U_1$ eine Zerlegung in zwei disjunkte und offene Mengen in U . Weil, nach Konstruktion $a \in U_0$, so folgt $U_0 \neq \emptyset$. Weil U nach Voraussetzung zusammenhängend ist, so folgt aus Satz 9.1 (ii), dass $U_1 = \emptyset$ und somit $U_0 = U$ ist. Man kann also jeden Punkt $b \in U$ mit a durch einen Streckenzug in U verbinden. Dies gilt für jedes $a \in U$ und wir haben gezeigt, dass U wegzusammenhängend (durch Streckenzüge) ist.

□