8. Januar 2003

V.5 Äquivalente Normen im $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$ gibt es viele Normen. Als Anwendung von Theorem V.6 werden wir zeigen, dass die Begriffe 'konvergente Folge', 'Cauchy Folge', 'offene Menge' usw. nicht von der Wahl der zur Norm gehörenden Metrik in $\mathbb{R}^n$ abhängt.

Definition 17 (Äquivalente Normen). Zwei Normen $\varrho_1,\ \varrho_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heissen *äquivalent*, falls es zwei Zahlen $0 < m < M$ gibt, so dass

$$m \leq \frac{\varrho_1(x)}{\varrho_2(x)} \leq M \qquad \text{für alle } x \neq 0.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen. Für die den Normen zugehörigen Metriken $d_j(x,y) := \varrho_j(x-y)$, gilt dann:

$$m\, d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq M\, d_2(x,y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Daher, für eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$:

$$d_2(x_n, x) \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d_1(x_n, x) \to 0.$$

Auf dem $\mathbb{R}^n$ gibt es nur eine Äquivalenzklasse von Normen weil die Einheitssphäre kompakt ist.

Theorem 8. *Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis. Theorem V.6, Heine-Borel) Es genügt zu zeigen, dass eine vorgegeben Norm $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zur Euklidschen Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ äquivalent ist, das heisst

$$0 < m \leq \frac{\varrho(x)}{\|x\|} \leq M, \qquad x \neq 0.$$

(1) $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig in der Euklidischen Norm. Denn zunächst gilt für jede Norm

$$|\varrho(x) - \varrho(y)| \leq \varrho(x-y).$$

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die kanonische Basis im $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$x - y = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) e_j.$$

Nach den Eigenschaften einer Norm gilt daher:

$$\varrho(x-y) \leq \sum_{j=}^{n} |x_j - y_j| \varrho(e_j) \leq \left(\sum_{j=0}^{n} \varrho(e_j) \right) \|x-y\| = L\|x-y\|,$$

weil $|x_j - y_j| \leq \|x-y\|$.

(2) Die Kugeloberfläche

$$S = \{x \in \mathbb{R} | \, \|x\| = 1\}$$

ist kompakt. Denn sie ist eine abgeschlossene und beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$, also kompakt, nach Heine-Borel. Um die Abgeschlossenheit von S zu zeigen, nehmen wir ein $x \in \overline{S}$, so dass $x = \lim x_j$ in $(\mathbb{R}^n, \| \, \|)$ mit $x_j \in S$ d. h. $\|x_j\| = 1$. Aus

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$$

folgt dann $\|x\| = \lim_{j \to \infty} \|x_j\| = 1$, d.h. $x \in S$.

(3) Weil $\varrho : S \to \mathbb{R}$ stetig und S kompakt ist, so existiert (nach Theorem V.6) ein Minimum und ein Maximum, das heisst es gibt x_*, $x^* \in S$, so dass

$$m := \varrho(x_*) \leq \varrho(x) \leq \varrho(x^*) =: M \qquad \text{für alle } x \in S.$$

Da $\|x_*\| = 1$ (also $x_* \neq 0$), so folgt aus den Eigenschaften einer Norm

$$m = \varrho(x_*) > 0.$$

(4) Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Dann ist

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1, \qquad \text{also } \frac{x}{\|x\|} \in S.$$

Daher:

$$\begin{aligned} & m \leq \varrho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq M, \qquad x \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \qquad & m \leq \frac{\varrho(x)}{\|x\|} \leq M, \qquad x \neq 0. \end{aligned}$$

Die Norm ϱ ist somit äquivalent zru Euklidischen Norm.

$\square$

Es sei im folgenden (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 1 (Folgenkompaktheit). Eine Teilmenge $K \subset M$ heisst *(folgen-) kompakt*, falls jede Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Teilfolge $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt, die gegen ein Element x_* in K konvergiert: $\lim_{k\to\infty} x_{j_k} = x_* \in K$.

Definition 2 (offene Überdeckung). Sei $E \subset M$ eine Teilmenge. Eine *offene Überdeckung* von E ist eine Familie $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ von offenen Mengen $V_\alpha \subset M$, mit Indexmenge I, so dass

$$E \subset \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha.$$

Definition 3 (Überdeckungskompaktheit). Eine Teilmenge $K \subset M$ heisst *(überdeckungs-)kompakt*, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d. h. falls

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha, \quad V_\alpha \subset M \text{ und offen, für alle } \alpha \in I$$

$$\text{so existieren } \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in I, \text{ so dass } K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_N}.$$

Definition 4 (Total-Beschränktheit). Eine Teilmenge $E \subset M$ heisst *total beschränkt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_N$ gibt, so dass

$$E \subset B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_N),$$

wobei $B_\varepsilon(x_j) := \{x \in M \,|\, d(x, x_j) < \varepsilon\}$ der *offene Ball* mit *Zentrum* x_j und *Radius* ε ist.

Bemerkung. Man kann annehmen, dass die Mittelpunkte der Bälle in K liegen. Denn, ist $K \subset B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_N)$, so gilt für $y_i \in B_\varepsilon(x_i) \cap K$, dass $K \subset B_{2\varepsilon}(y_1) \cup \cdots \cup B_{2\varepsilon}(y_N)$.

Theorem 9 (Kompaktheit in metrischen Räumen). *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $K \subset M$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) K ist überdeckungs-kompakt.

(ii) K ist folgen-kompakt.

(iii) K ist total beschränkt und vollständig.

Beweis. Strategie: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.
Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge ohne Häufungspunkt in K. Für jedes $y \in K$ gibt es einen Radius $r_y > 0$, so dass der Ball $B_{r_y}(y)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Die $\{B_{r_y}(y)\}_{y\in K}$ sind eine offene Überdeckung von K, so dass es $y_1, \ldots, y_n \in K$ gibt mit $K \subset B_{r_{y_1}}(y_1) \cup \cdots \cup B_{r_{y_n}}(y_n)$. Da die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt in K hat, besteht sie aus unendlich vielen verschiedenen Folgengliedern (sonst müsste ein Folgenglied unendlich oft auftreten und wäre damit ein Häufungspunkt), die alle in mindestens einem der Bälle $B_{r_{y_i}}(y_i)$ liegen, einer davon enthält also unendlich viele Folgenglieder, im Widerspruch zur Wahl von r_y. Es gibt also keine Folge ohne Häufungspunkt in K.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K. Nach Annahme besitzt die Folge einen Häufungspunkt $x \in K$. Da Cauchy-Folgen höchstens einen Häufungspunkt besitzen, konvergiert die Folge gegen $x \in K$, und K ist vollständig.

Wäre K nicht total beschränkt, gäbe es ein $\varepsilon > 0$, für das es keine endliche Überdeckung von K mit Bällen vom Radius ε gibt. Wähle $x_1 \in K$ beliebig. Nach Annahme gibt es ein $x_2 \in K \setminus B_\varepsilon(x_1)$. Sind $x_1, \ldots, x_n \in K$ schon konstruiert, so wähle x_{n+1} in $K \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_n))$, was nach Annahme möglich ist. Aufgrund der Konstruktion ist $d(x_i, x_j) > \varepsilon$, die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt somit keinen Häufungspunkt. Deswegen muss K total beschränkt sein.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von K mit offenen Mengen, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Sei $\varepsilon_n = 2^{-n}$. Aufgrund der totalen Beschränktheit wird K von endlich vielen $B_{\varepsilon_1}(x_i)$ überdeckt. Da die $\{U_i\}_{i\in I}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzen, wird eines der $K \cap B_{\varepsilon_1}(x_i)$ auch von keiner endlichen Teilüberdeckung überdeckt. Sei $y_1 = x_i$. Die Menge $K \cap B_{\varepsilon_1}(y_1)$ ist als Teilmenge von K total beschränkt, wird also von endlich vielen $B_{\varepsilon_2}(x'_j)$ überdeckt. Eines dieser $B_{\varepsilon_2}(x'_j)$ wird von keiner endlichen Teilüberdeckung von $\{U_i\}_{i\in I}$ überdeckt. Sei $y_2 = x'_j$. Durch dieses Verfahren wird induktiv eine Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Für $n \leq m$ ist

$$\begin{aligned}
d(y_n, y_m) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + \cdots d(y_{m-1}, y_m) \\
&\leq \varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_m \\
&= 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \cdots + 2^{-m} \\
&\leq 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right) \\
&\leq 2^{-(n-1)}
\end{aligned}$$

daher sind die $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergieren gegen ein $y \in K$, da K vollständig ist. Dieses y ist in einem U_i der Überdeckung enthalten. Da jenes offen ist, enthält es einen Ball $B_\delta(y)$ für $\delta > 0$. Wähle n so gross, dass $d(y, y_n) \leq \frac{\delta}{2}$ und $\varepsilon_n \leq \frac{\delta}{2}$. Die Inklusionen $B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap K \subset B_\delta(y) \cap K \subset U_i$ widersprechen der Wahl von $B_{\varepsilon_n}(y_n)$, da dieses nicht von endlich vielen Mengen $\{U_i\}_{i\in I}$ überdeckt wird.

$\square$

Bemerkung. In topologischen Räumen gilt weder i) $\Rightarrow$ ii) noch ii) $\Rightarrow$ i). Das Konzept der Totalbeschränktheit besitzt kein Analogon in topologischen Räumen.

Korollar 1. Der Abschluss einer total beschränkten Menge in einem vollständigen metrischen Raum ist kompakt.

Beweis. Da eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass der Abschluss einer totalbeschränkten Menge total beschränkt ist. Sei K total beschränkt und $\varepsilon > 0$. Es gibt $x_1, \ldots, x_n$, so dass $K \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1) \cup \cdots \cup B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n)$. Weiter gilt

$$\bar{K} \subset \bar{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1) \cup \cdots \cup \bar{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_n),$$

was zu zeigen war.

$\square$

Theorem 1 (Heine Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (versehen mit der euklidischen Metrik) ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Eine kompakte Menge ist beschränkt (überdecke K mit $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$) und abgeschlossen (aus $x_n \to x$ folgt, dass x als einziger Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ selbst in K liegen muss).

Jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist total beschränkt: Nach Annahme ist sie in einem Ball und daher auch in einem Würfel enthalten. Dieser Würfel kann in endlich viele Würfel der Seitenlänge ε zerlegt werden. Diese kleinen Würfel liegen je in einer Kugel mit Radius $\sqrt{n}\varepsilon$, d.h. jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist total beschränkt. Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, ist es auch jede abgeschlossene Teilmenge, insbesondere ist jede beschränkte abgeschlossene Menge total beschränkt und vollständig, also kompakt.

□

Es ist einfach zu sehen, dass Bilder kompakter metrischer Räume unter stetigen Funktionen kompakt sind. Aus dieser Beobachtung und dem vorherigen Satz folgt, dass stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Räumen Supremum und Infimum annehmen.

Bezüglich der Metrik $d(x,y) = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right|$ ist $\mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt, denn die Folge $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt in $(\mathbb{R}, d)$.

Ein anderes Beispiel einer nicht kompakten aber beschränkten und abgeschlossenen Menge ist die Einheitssphäre in ℓ^p (betrachte die Standardbasis als Folge). Allgemeiner folgt aus einem Satz von Riesz (wird später in der Vorlesung behandelt), dass nur in *endlichdimensionalen* normierten Vektorräumen alle beschränkten und abgeschlossenen Mengen kompakt sind.

V.7 Der Fundamentalsatz der Algebra

Eine weitere Folgerung aus Theorem 6 ist der "Fundamentalsatz" der Algebra.

Theorem 10. *Jedes nicht-konstante Polynom*

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \qquad a_j \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ n \geq 1,$$

hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle, das heisst, es existiert ein $z^* \in \mathbb{C}$ mit $P(z^*) = 0$.

Folgerung: Polynomabbildungen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind für $n \geq 1$ surjektiv: Gegeben $w \in \mathbb{C}$, dann existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = w$, nämlich die Nullstelle des Polynoms $Q(z) := P(z) - w$. Dies ist im Gegensatz zu $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. (Theorem V.6: Eine stetige Funktion $\boldsymbol{K} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{K}$ kompakt, hat ein Minimum.) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a_n = 1$ ist:

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Betrachte die stetige Funktion $z \mapsto |P(z)| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Dann ist $P(z) \geq 0$. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass es ein $z^* \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = |P(z^*)| = 0.$$

Definiere $\mu := \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| \geq 0$. Betrachte $|z| = R > 0$, dann ist $|z^j| = |z|^j = R^j$ und daher :

$$|P(z)| \geq R^n \left(1 - |a_{n-1}| \frac{1}{R} - \cdots - |a_0| \frac{1}{R^n} \right).$$

Es gilt:

$$\lim_{R \to \infty} R^n \left(1 - |a_{n-1}| \frac{1}{R} - \cdots - |a_0| \frac{1}{R^n} \right) = \infty.$$

Daher existiert ein $R_0 > 0$ so, dass

$$|P(z)| \geq \mu + 1, \qquad |z| \geq R_0. \tag{1}$$

Definiere $K := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq R_0\}$. Die Kreisscheibe K ist abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, also kompakt (Heine-Borel). Da die Abbildung $z \mapsto |P(z)|$ auf K stetig ist, so existiert (Theorem V.6) ein $z^* \in K$, so dass

$$|P(z^*)| = \mu = \inf_{z \in K} |P(z)| \leq |P(z)|, \qquad z \in K.$$

Aus (1) folgt nun: $|P(z^*)| \leq |P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Behauptung: $\mu = 0$.

Beweis: (Widerspruch.) Nehme an, $\mu > 0$. Dann ist $P(z^*) \neq 0$. Definiere eine neues Polynom

$$Q(z) := P(z + z^*) \frac{1}{P(z^*)}.$$

Q ist nicht-konstant, und

$$\begin{aligned} Q(0) &= 1, \\ |Q(z)| &\geq 1, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{2}$$

Es gibt deshalb ein kleinstes k mit $1 \leq k \leq n$, so, dass

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \qquad b_k \neq 0.$$

Wir suchen ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|Q(z_0)| < 1$ was im Widerspruch zu (2) wäre. Wähle $\vartheta \in \mathbb{R}$, so dass

$$e^{ik\vartheta} = -\frac{|b_k|}{b_k}.$$

Dies ist die Polardarstellung einer komplexen Zahl, welche später eingeführt wird. Dann ist

$$b_k e^{ik\vartheta} = -|b_k|.$$

Halte ϑ fest und betrachte den Strahl $z = re^{i\vartheta}$, $r > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 + b_k z^k &= 1 + b_k e^{ik\vartheta} r^k \\ &= 1 - r^k |b_k| \\ &> 0 \qquad \text{für } r \text{ klein.} \end{aligned}$$

Daher ist $|1 + b_k z^k| = 1 + b_k z^k$, und deshalb für $z = re^{i\vartheta}$ und r klein:

$$\begin{aligned} |Q(re^{i\vartheta}| &\leq 1 - r^k |b_k| + r^{k+1} |b_{k+1}| + \cdots + r^n |b_n| \\ &= 1 - r^k (|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k} |b_n|). \end{aligned}$$

Wähle r so klein, dass $(|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|) > 0$. Dann erfüllt $z_0 = re^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$ die Abschätzung $|(Q(z_0)| < 1$. Dies ist der gesuchte Widerspruch zu (2). Deshalb gilt $\mu = 0$, und somit $P(z^*) = 0$.

$\square$