Theorem 2. ***(Riemann)***

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Longleftrightarrow$$

es gibt eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ so dass zu ***jedem*** *$\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der folgenden Eigenschaft: für jedes $P \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|P\| < \delta$ gilt*

$$|R(P,f,\xi) - A| < \varepsilon\,,$$

für ***jede*** *Wahl von Zwischenpunkten ξ_j von P. In diesem Fall ist*

$$A = \int_a^b f\,.$$

Man schreibt dafür:

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(P,f,\xi) = \int_a^b$$

Beweis. **(Darboux)**
($\Longleftarrow$)
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Vor. ex. $\delta > 0$, so dass für $P \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|P\| < \delta$ die Riemann–Summen die folgende Abschätzung erfüllen:

(1) $$A - \varepsilon < R(P,f,\xi) < A + \varepsilon\,,$$

für jede Wahl der Zwischenpunkte. Wähle die Zwischenpunkte so, dass $m_j \le f(\xi_j) \le m_j + \varepsilon$. Nach Multiplikation mit Δx_j und Summation über j erhalten wir

(2) $$s(P,f) \le R(P,f,\xi) \le s(P,f) + \varepsilon(b-a)\,.$$

Wählen wir Zwischenpunkte ξ'_j mit $M_j - \varepsilon \le f(\xi'_j) \le M_j$, so erhalten wir

(3) $$S(P,f) - \varepsilon(b-a) \le R(P,f,\xi') \le S(P,f)\,.$$

Aus (1) – (3) folgt

$$S(P,f) - s(P,f) \le 2\varepsilon + 2\varepsilon(b-a)\,.$$

Dies kann man für **jedes** $\varepsilon > 0$ machen. Nach Darboux ist daher $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Mit $s(P,f) \le \int f \le S(P,f)$ folgt nun überdies

$$A - \varepsilon(1+b-a) \le \int f \le A + \varepsilon(1+b-a)\,.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, so dass $A = \int f$.

($\Longrightarrow$)
Für $f \in \mathcal{R}[a,b]$ setzen wir $A := \int f$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Definition des Integrals ex. $P \in \mathcal{P}[a,b]$, mit

(4) $$A - \varepsilon < s(P,f) \le S(P,f) < A + \varepsilon\,.$$

Wir halten im folgenden die Zerlegung $P : a_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ fest.

Sei $\delta > 0$ und $P_1 \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\|P_1\| = \max \Delta_j < \delta$ wobei $P_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Sei $R = R(P_1, f, \xi)$ eine Riemann–Summe bezüglich P_1 und sei $A = \{k \mid t_{j-1} < x_{k-1} < x_k < t_j$ für ein j, $1 \leq j \leq m\}$. Dann ist

$$R = \sum_{k \in A} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \notin A} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Für $k \in A$ gilt $m_j \leq f(\xi_k) \leq M_j$ für das entsprechende j. Mit $M := \sup |f|$ folgt daher

$$-2mM\delta + s(P, f) \leq R \leq S(P, f) + 2mM\delta . \tag{5}$$

Wähle jetzt $\delta > 0$ so, dass $2mM\delta = \varepsilon$. Dann erhalten wir aus (4) und (5)

$$A - 2\varepsilon \leq R \leq A + 2\varepsilon .$$

Dies gilt für jede Wahl der Zwischenpunkte in P_1. Wir haben gezeigt, dass für $\|P_1\| < \delta$, die Abschätzung $|R(P_1, f, \xi) - A| \leq 2\varepsilon$ gilt. Damit ist der Beweis von Theorem 2 fertig.

$\square$

Definition. (L-Nullmenge) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heisst eine **L-Nullmenge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Intervalle $I_n =]a_n, b_n[$ existieren, so dass

$$M \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n \quad \text{und} \quad \sum_{n \geq 1} |I_n| \leq \varepsilon ,$$

wobei $|I_n| = b_n - a_n$ die Länge des Intervalls ist.

Beispiel. Abzählbare Mengen sind Nullmengen. Denn sei etwa $M = \{x_1, x_2, \dots\}$, mit $x_j \in \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle die offenen Intervalle $I_k = (x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}})$, dann ist die Länge $|I_k| = \frac{\varepsilon}{2^k}$, und

$$M \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k \geq 1} |I_k| = \varepsilon \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} = \varepsilon .$$

Also ist die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, obwohl sie dicht ist in $\mathbb{R}$, dass heisst $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$!

Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen $N_k \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$ ist wieder eine Nullmenge. Denn sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es zu jedem k abzählbar viele Intervalle $I_{kj}, j \geq 1$, so dass

$$N_k \subset \bigcup_{j \geq 1} I_{kj} \quad \text{und} \quad \sum_{j \geq 1} |I_{kj}| \leq \frac{\varepsilon}{2^k} .$$

Daher:

$$\bigcup_{k \geq 1} N_k \subset \bigcup_{k \geq 1} \left(\bigcup_{j \geq 1} I_{kj} \right) \quad \text{und} \quad \sum_{k \geq 1} \sum_{j \geq 1} |I_{kj}| \leq \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon .$$

Definition. (Oszillation einer Funktion) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so definiert man die Oszillation als den Durchmesser des Bildes:

$$\begin{aligned} \Omega_f(a, b) &= \sup \{ |f(x) - f(y)| \, ; \, a \leq x \leq y \leq b \} \\ &= \sup f - \inf f . \end{aligned}$$

Halten wir x fest, so ist die Funktion $h \mapsto \Omega_f(x - h, x + h), h > 0$, monoton zunehmend, deshalb existiert der Grenzwert

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0} \Omega_f(x - h, x + h) \leq \Omega_f(x - h, x + h) .$$

Er heisst die Oszillation von f im Punkt x.

Die Funktion f ist **stetig im Punkt** x genau dann falls $\omega_f(x) = 0$ ist.

Theorem 3. **(Lebesgue)**

$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff$

(i) f ist beschränkt und

(ii) f ist stetig mit (ev.) Ausnahme von Punkten, die eine Nullmenge bilden.

Beweis. (Darboux)
($\Longrightarrow$)
Ist $f \in \mathcal{R}[a,b]$, so ist f beschränkt und es bleibt zu zeigen, dass die Menge der Unstetigkeitspunkte, das heisst die Menge

$$\left\{x \in [a,b] \;\middle|\; \omega_f(x) > 0\right\}$$

eine Nullmenge ist. Da

$$\{x|\,\omega_f(x) > 0\} \;=\; \bigcup_{s \geq 1} \left\{x|\omega_f(x) \;\geq\; \frac{1}{s}\right\}$$

und, da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, so genügt es zu zeigen, dass die Mengen

$$E_s \;=\; \left\{x \,|\, \omega_f(x) \;\geq\; \frac{1}{s}\right\}, \quad s \;\geq\; 1$$

alle Nullmengen sind. Sei nun s gegeben. Wähle ein $\varepsilon > 0$, dann existiert nach Darboux eine Partition $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots \leq x_n = b$, so dass (mit den Bezeichnungen von Kap. VIII.1)

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \;<\; \frac{\varepsilon}{2s}\,. \tag{1}$$

Sei nun $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ein Intervall, welches einen Punkt $\xi \in E_s$ enthält, mit $x_{k-1} < \xi < x_k$, dann ist (für h klein)

$$\frac{1}{s} \;\leq\; \omega_f(\xi) \;\leq\; \Omega_f(\xi - h, \xi + h) \;\leq\; \Omega_f(I_k) \;=\; (M_k - m_k)\,.$$

Ist also $\mathcal{M}^*$ die Menge aller solcher Intervalle der Partition, so folgt, mit (1),

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \sum_{I_k \in \mathcal{M}^*} |I_k| \;&\leq\; \textstyle\sum_{I_k \in \mathcal{M}^*} |I_k|(M_k - m_k) \\ &\leq\; \textstyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(M_k - m_k) \;<\; \frac{\varepsilon}{2s}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Überdecken wir nun auch die Endpunkte aller Intervalle der Partition mit Intervallen $J_0, J_1, \ldots, J_n$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{n} |J_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt

$$E_s \subset \left(\bigcup_{I_k \in \mathcal{M}^*} I_k\right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} J_k\right)$$

und daher, mit (2),

$$\sum_{I_k \in \mathcal{M}^*} |I_k| \; + \sum_{1 \leq k \leq n} |J_k| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \,.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, so dass E_s eine Nullmenge ist.
($\Longleftarrow$)

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, und ist $E = \{x | \omega_f(x) > 0\}$ eine Nullmenge, so ist zu zeigen, dass $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ist. Wiederum wird Darboux angwendet. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es, nach Definition einer Nullmenge, eine Folge von offenen Intervallen $I_n = (a_n, b_n)$, $n \geq 1$, so dass

$$E \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n \quad \text{und} \quad \sum_{n \geq 1} |I_n| \;=\; \sum_{n \geq 1} (b_n - a_n) \;\leq\; \varepsilon \,. \tag{3}$$

Ist f im Punkt x stetig, das heisst $\omega_f(x) = 0$, dann gibt es ein Intervall $I_x =]x-h, x+h[$, wobei $h = h(x, \varepsilon)$ von x und ε abhängt, so dass

$$\Omega_f(x-h, x+h) < \varepsilon \,. \tag{4}$$

Die Familie aller solcher Intervalle I_x, wo f stetig ist in x, zusammen mit allen Intervallen $I_n, n \geq 1$ bilden eine offene Überdeckung von $[a,b]$. Da $[a,b]$ eine kompakte Menge ist, so gibt es (Theorem V.9) eine endliche Teilüberdeckung, so dass

$$[a,b] \;\subset\; I_{n_1} \cup \cdots \cup I_{n_k} \cup I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_r} \,. \tag{5}$$

Wir wählen jetzt eine **spezielle** Partition $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, so dass jedes der Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ ganz einem der Intervalle in (5) enthalten ist. Falls $[x_{k-1}, x_k] \subset I_{x_j}$ für ein j, so folgt $M_k - m_k \leq \Omega_f(I_{x_j}) \leq \varepsilon$. Wir können nun, (5) und (3) benutzend, sehr grob abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\,(M_k - m_k) \\
\leq\;& \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \cdot 2 \sup |f(x)| \;+\; \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \varepsilon \\
\leq\;& \varepsilon (2 \sup |f| \;+\; b - a) \,.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\sup |f| < \infty$. Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also folgt aus dem Kriterium von Darboux, dass $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ist.

$\square$

Theorem 7. *Sei* $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$.

$$V(f) = \int_a^b \|f'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + \ldots + f_n'(t)^2}\, dt\,.$$

Beweis. 2 Schritte:

$$V(f) \overset{(1)}{\leq} \int_a^b \|f'(t)\|dt \overset{(2)}{\leq} V(f)\,.$$

Beweis von (1). Sei

$$P \in \mathcal{P}[a,b]\,,\ a \leq t_{j-1} < t_j \leq b\,,$$

eine Partition, dann gilt

$$f(t_j) - f(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t)dt\,. \tag{H.S}$$

Aus Theorem 6 folgt

$$\|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|dt\,.$$

Addiere über j :

$$V(P,f) \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt\,.$$

Daher

$$V(f) := \sup_P V(P,f) \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt\,.$$

Beweis von (2): Sei $\varepsilon > 0$. Dann beweisen wir die Abschätzung

$$\int_a^b \|f'(t)\|dt \leq V(f) + 2\varepsilon(b-a)\,.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist (2) dann bewiesen. Weil f' nach Voraussetzung stetig ist, so ist $f' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gleichmässig stetig **auf** $[a,b]$. Daher existiert ein universelles $\delta > 0$, so dass

$$\|f'(s) - f'(t)\| < \varepsilon \text{ falls } |t-s| < \delta\,.$$

Nehme $P \in \mathcal{P}[a,b]$ mit $\Delta t_j = t_j - t_{j-1} < \delta$, alle j. Dann gilt

$$\|f'(t) - f'(t_j)\| < \varepsilon\,, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j\,, \tag{$*$}$$

und daher, mit der Dreiecks–Ungleichung,

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \|f'(t) - f'(t) + f'(t_j)\| \\ &\leq \|f'(t_j)\| + \|f'(t) - f'(t_j)\| \\ &\leq \|f'(t_j)\| + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Integriere, benutze die Monotonie der Integrale (Th. 4),

$$\begin{aligned}
\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|dt &\leq \|f'(t_j)\|\,\Delta t_j + \varepsilon\Delta t_j \\
&= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t_j)dt \right\| + \varepsilon\Delta t_j \\
&= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f'(t) + f'(t_j) - f'(t)]dt \right\| + \varepsilon\Delta t_j \\
&\leq \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t)dt \right\| \;+\; \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} [f'(t_j) \;-\; f'(t)]dt \right\| + \varepsilon\Delta t_j \,.
\end{aligned}$$

Benutze H.S., Theorem 6, und $(*)$:

$$\leq \;\|f(t_j) - f(t_{j-1})\| + 2\varepsilon\Delta t_j \,.$$

Addiere die Ungleichungen für alle $j = 1, 2, \ldots n$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \|f'(t)\|dt &\leq V(P, f) + 2\varepsilon(b-a) \\
&\leq V(f) + 2\varepsilon(b-a)
\end{aligned}$$

Der Beweis von Theorem 7 ist fertig.

$\square$

Bemerkung. Die Annahme $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ **stetig** ist wichtig, wie folgendes **Beispiel** zeigt:

$$\begin{aligned}
f \;&:\; [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\
f \;&=\; (f_1, \ldots, f_n) \;=\; (f_1, 0, \ldots, 0) \\
f_1(0) \;&=\; 0\,, \quad f_1(t) \;=\; t^2 \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{t^2}\right)\right]^2 \,,\; t \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Dann ist f überall differenzierbar; die Ableitung ist nicht stetig in $t = 0$, und

$$V\left(f_1, \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right]\right) \;\geq\; 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\,,$$

also $V(f) = \infty$. Die Kurve ist nicht rektifizierbar.