

Ergänzung zur Vorlesung Analysis I. Kap. IV

Definition. (Potenzreihenfunktion) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ habe Konvergenzradius $R > 0$. Dann kann man die Funktion definieren:

$$f : B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n a_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j =: f(z) \in \mathbb{C}$$

Der Definitionsbereich ist die offene Kreisscheibe $B_R(0)$ mit Radius R und Zentrum 0. Der Randkreis gehört *nicht* dazu. Solche Funktionen werden später *analytisch* oder *holomorph* genannt. Diese Funktionen haben spezielle Eigenschaften, z. Bsp.

Satz 5. Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei positiv, $R > 0$. Nehme an, dass nicht alle a_n Null sind. Dann gibt es eine Kreisscheibe $B_\rho(0)$, $0 < \rho < R$ um den Nullpunkt, die höchstens endlich viele Nullstellen von f ($f(z) = 0$) enthält.

Beweis. Sei $0 < r < R$, $|z| \leq r$, dann

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{j=0}^n a_j z^j \right| &= \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j z^j \right| \\ &\leq |z|^{n+1} \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| |z|^{j-(n+1)} \\ &\leq |z|^{n+1} \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| r^{j-(n+1)} \\ &= |z|^{n+1} \underbrace{\frac{1}{r^{n+1}} \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| r^j}_{\equiv c \equiv c(r, n) < \infty} \end{aligned}$$

Wir haben bewiesen

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^n a_j z^j \right| \leq |z|^{n+1} \cdot c, \quad |z| < r.$$

Sei N der kleinste Index mit $a_N \neq 0$. Dann folgt

$$|f(z) - a_N z^N| \leq |z|^{N+1} \cdot c, \quad |z| \leq r. \quad (*)$$

Falls die Aussage des Satzes falsch ist, so existiert in jeder Kreisscheibe $B_{\frac{r}{k}}(0)$, $k = 1, 2, \dots$ eine Nullstelle $z_k \neq 0$, sodass also $f(z_k) = 0$. z_k einsetzen in (*) liefert

$$\begin{aligned} |a_N z_k^N| &\leq |z_k|^{N+1} \cdot c, \quad \text{alle } k \\ |a_N| &\leq |z_k| \cdot c, \quad \text{alle } k. \end{aligned}$$

Da $\lim z_k = 0$, folgt $a_N = 0$ im Widerspruch zu $a_N \neq 0$. □

Folgerung:

Theorem 1. (*Identitätssatz für analytische Funktionen.*) Die Potenzreihen

$$f(z) := a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

$$g(z) := b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots$$

haben die Konvergenzradien $R_1 > 0$ und $R_2 > 0$. Nehme an: es gibt eine Folge $z_k \neq 0$, sodass

(i) $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$

(ii) $f(z_k) = g(z_k)$, alle k

Dann gilt

$$a_n = b_n, \quad \text{alle } n = 0, 1, 2$$

Spezialfall: "Koeffizientenvergleich". Nehme an

$$f(z) = g(z), \quad \text{alle } z \in B_r(0), 0 < r < R_1, r < R_2$$

Dann gilt

$$a_n = b_n \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Beweis. Wende Satz 5 an auf die Differenz $f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)z^n$. □