8. November 2002

Die Euler Zahl e

Zur weiteren Illustration des Monotonieprinzips betrachten wir die zwei Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ definiert durch

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$y_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

(wobei $0! = 1$). Beide Folgen sind konvergent und haben denselben Grenzwert, welcher mit e bezeichnet wird.

Satz 8.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} =: e$$
$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!}\frac{1}{n}, \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$e = 2.7182\ldots$$
$$e \textit{ ist irrational.}$$

Bemerkung. Später werden wir sehen, dass

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. (Monotonieprinzip)

Lemma. (i) $y_n < y_{n+1} < 3, \quad n \geq 1$
(ii) $x_n < x_{n+1}, \quad n \geq 1$
(iii) $x_n < y_n, \quad n \geq 2.$

Beweis des Lemmas.

(i) $y_n < y_{n+1}$ ist klar. Zur Abschätzung < 3:

$$\begin{aligned} y_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \\ &< 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 1\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3 \end{aligned}$$

(ii) Sei $n \geq 2$;

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{n-1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\frac{n}{n-1} \\ &> \left(1-n\frac{1}{n^2}\right)\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\frac{n}{n-1} = 1. \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Abschätzungen die Bernoulli-Ungleichng $(1+x)^n > 1+nx$ (für alle $x > -1$, $x \neq 0$, $n \geq 2$) verwendet wurde.

(iii) Es ist für $1 \leq k \leq n$, $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\\ &= \frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &< \frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der binomischen Formel folgt

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\ &< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = y_n.\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Die beiden Folgen (x_n) und (y_n) sind somit beschränkt und monoton, daher konvergent und mit Satz 3 folgt aus (iii)

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n =: y$$

Um $x \geq y$ zu zeigen, halten wir ein m fest und betrachten für $n > m$

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\ &> \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) =: z_n\end{aligned}$$

Mit $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right) = 1$ für $a \in \mathbb{R}$ folgt wiederum aus Satz 3, dass $x = \lim x_n \geq \lim z_n = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = y_m$. Dies gilt für alle $m \geq 2$. Mit Satz folgt also $x \geq \lim_{m\to\infty} y_m = y$. Insgesamt gilt $x \leq y \leq x$ und deshalb $x = y$.

Zum Beweis der Abschätzung in Satz 8 betrachten wir für ein festes n den Ausdruck

$$\begin{aligned}y_{n+m} - y_n &= \sum_{k=0}^{n+m}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(n+2)^k}\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1-\frac{1}{(n+2)^m}}{1-\frac{1}{(n+2)}}\\ &\leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{m\to\infty} y_{n+m} = e$ folgt aus Satz 3, für alle n,

$$0 < e - y_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!}\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$$

wie im Satz behauptet. Aus der Abschätzung folgt die Irrationalität der Euler Zahl e. Denn, nehme an $e = \frac{m}{n}$, $n \geq 1$, sei rational. Dann erhält man durch Multiplikation mit $n!$ die Ungleichungen

$$0 < n! \left(\frac{m}{n} - y_n \right) < \frac{1}{n}.$$

Weil $n! \left(\frac{m}{n} - y_n \right)$ eine natürliche Zahl ist, steht dies im Widerspruch dazu, dass zwischen 0 und 1 keine natürliche Zahl liegt. Damit ist Satz 8 bewiesen. $\square$