

**Name:**

**Leginummer:**

Mathematik-Teil der Prüfung Mathematik III und Systemanalyse II im Frühling 2008

Vorlesung *Mathematik III und Systemanalyse II* von Dr. P. Thurnheer.

**Vorgesehene Zeit für diesen Teil: 40 Minuten**

**Maximale Punktzahl: 15 Punkte**

**Hilfsmittel: Schriftliche Unterlagen, kein Taschenrechner, kein Mobiltelefon**

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
Total		

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss und unter Einführung neuer geeigneter Koordinaten den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} z \sin y \\ xz \cos y \\ ze^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des geraden Kreiszylinders mit Höhe 3 und Grundkreis

$$K = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 2, z = 0\}.$$

Orientieren Sie die Oberfläche so, dass die Normale nach aussen zeigt.

**Hinweis:**  $(e^{r^2})' = ?$

(ca. 4 Punkte)

2. Lösen Sie folgende Aufgaben für die Vektorfelder

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \ln x \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2} z \\ -2z + xyz \\ 2y + \frac{y^2}{2} x \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie  $\text{rot } F(x, y, z)$  und  $\text{rot } G(x, y, z)$ .
- b) Geben Sie eine spezielle geometrische Eigenschaft der Vektoren von  $\text{rot } F(x, y, z)$  und zwei spezielle Eigenschaften der Vektoren von  $\text{rot } G(x, y, z)$  an.
- c) Mit dem Satz von Stokes: Wie gross ist aufgrund Ihrer Feststellung unter b) die Arbeit des Vektorfeldes  $F(x, y, z)$  resp.  $G(x, y, z)$  längs eines ebenen geschlossenen Weges  $\gamma$ , der in einer Normalebene zur  $x$ -Achse liegt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) (Kann unabhängig von den Teilaufgaben a) bis c) gelöst werden.) Berechnen Sie explizit, das heisst als Linienintegral, die Arbeit des Vektorfeldes  $G(x, y, z)$  längs des Kreises

$$k = \{(x, y, z) | x = 0, y^2 + z^2 = 4\}.$$

Vergleichen Sie Ihr Resultat mit Ihrer Antwort unter c).

(ca. 7 Punkte)

3. Reduzieren Sie die partielle Differentialgleichung

$$xu_x(x, t) - \frac{1}{\ln t} u_t(x, t) = 0$$

durch einen Separationsansatz in Produktform auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen und bestimmen Sie deren allgemeine Lösungen.

**Tip:** Schreiben Sie  $\ln t = 1 \cdot \ln t$  und integrieren Sie partiell.

(ca. 4 Punkte)