Prof. F. Hampel, Prof. H.-R. Künsch
D-BIOL, D-CHAB Herbst 2005

Statistik: Bachelor/2. Vordiplom/SD

1. (8 Punkte) Alle Teilaufgaben ergeben +1 Punkt, falls richtig beantwortet, −1 Punkt, falls falsch beantwortet, und bei keiner Antwort 0 Punkte. Ein allfälliges negatives Punktetotal wird als Null gezählt.

Geben Sie bei a)–g) jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

a) Die Nullhypothese kann auf dem 5%-Niveau nicht verworfen werden, wenn der P-Wert des Tests 0.029 beträgt.

b) Wenn das Signifikanzniveau eines Tests vergrössert wird, dann wird der Annahmebereich grösser.

c) Wenn der Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt, dann kann ein Fehler 2. Art vorliegen.

d) Wir testen die Hypothese $\mu = 0$ zweiseitig mit dem t-Test. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art ist grösser unter der Alternative $\mu = -0.2$ als unter $\mu = -0.3$.

e) Der Chiquadrat-Test wird verwendet, wenn man beobachtete Häufigkeiten mit den Häufigkeiten vergleichen will, die man auf Grund einer bestimmten Theorie erwartet.

f) Der Wert der Teststatistik für den Zweistichproben-Wilcoxon-Test ändert sich nicht, wenn man an Stelle der ursprünglichen positiven Werte $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_m)$ die logarithmierten Werte $(\log x_1, \ldots, \log x_n)$ und $(\log y_1, \ldots, \log y_m)$ verwendet.

g) Wenn X lognormal verteilt ist, dann ist auch $Y = \frac{1}{X}$ lognormal verteilt.

Geben Sie bei h) an, welche der angegebenen Antworten richtig ist.

h) X und Y sind unabhängig mit Standardabweichung $\sigma_X = 2$ und $\sigma_Y = 1$. Dann ist die Standardabweichung von $Z = X - Y$ gleich

A) 1 B) 3 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$

Bitte wenden!

2. (10 Punkte)

a) In einer Studie über das Fortpflanzungsverhalten einer Wespenart wurde bei einer Stichprobe von 197 Tieren mit Hilfe von genetischen Tests je der Inzuchtskoeffizient bestimmt. Der Inzuchtskoeffizient liegt zwischen -1 und $+1$ und ist bei Arten, die keine Tendenz zur Inzucht haben, sondern sich zufällig paaren, gleich Null. Bei Arten, die eine Tendenz zur Inzucht haben, ist er positiv. Das arithmetische Mittel des Inzuchtskoeffizienten in der Stichprobe war 0.044 und die empirische Standardabweichung der Einzelwerte war 0.884. Das Ziel der Studie war herauszufinden, ob diese Wespenart eine Tendenz zur Inzucht hat.

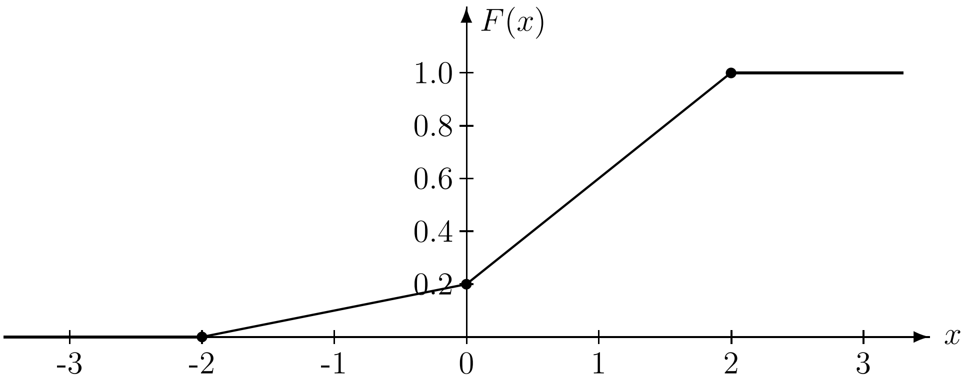
i) Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternative, die hier angebracht sind.

ii) Testen Sie diese Nullhypothese auf dem 5%-Niveau mit einem geeigneten Test.

iii) Braucht man, dass die Inzuchtskoeffizienten der einzelnen Tiere normalverteilt sind, damit der in ii) verwendete Test gültig ist? Begründen Sie ganz kurz (ein Stichwort genügt).

Hinweis: Es genügt, mit der Näherung $\sqrt{197} \approx 14$ zu rechnen.

b) Eine Zufallsvariable X habe die folgende kumulative Verteilungsfunktion.



i) Geben Sie die Dichte von X an.

ii) Bestimmen Sie $P(X > 1)$.

iii) Bestimmen Sie den Median von X.

Siehe nächstes Blatt!

3. (11 Punkte) Die Härte von Holz ist entscheidend für die Verwendung als Baumaterial. Die Messung der Härte ist jedoch aufwendig. Die Dichte von Holz ist verwandt mit der Härte und wesentlich einfacher zu messen. Um einen Zusammenhang zwischen Härte und Dichte zu bestimmen, wurden die Härten y_i und die Dichten x_i bei 36 Hölzern gemessen. Wir betrachten die folgenden drei Modelle

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i \quad (1)$$
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + E_i \quad (2)$$
$$\log y_i = \gamma_0 + \gamma_1 \log x_i + E_i \quad (3)$$

Die Fehlerterme E_i werden in allen Modellen als i.i.d. und $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilt angenommen. Systat ergibt für die drei Modelle den folgenden Output:

Dep Var: HARD   N: 36   Multiple R: 0.974   Squared multiple R: 0.949

Adjusted squared multiple R: 0.948   Standard error of estimate: 183.059

Effect	Coefficient	Std Error	Std Coef	Tolerance	t	P(2 Tail)
CONSTANT	-1160.500	108.580	0.000	.	-10.688	0.000
DENS	57.507	2.279	0.974	1.000	25.238	0.000

Analysis of Variance

Source	Sum-of-Squares	df	Mean-Square	F-ratio	P
Regression	2.13457E+07	1	2.13457E+07	636.979	0.000
Residual	1139366.476	34	33510.779		

*** WARNING ***
Case 32 is an outlier (Studentized Residual = 4.473)

Durbin-Watson D Statistic 2.194
First Order Autocorrelation -0.166

Abbildung 1: Systat Output für Modell (1)

Dep Var: HARD   N: 36   Multiple R: 0.981   Squared multiple R: 0.962

Adjusted squared multiple R: 0.959   Standard error of estimate: 161.745

Effect	Coefficient	Std Error	Std Coef	Tolerance	t	P(2 Tail)
CONSTANT	-118.007	334.967	0.000	.	-0.352	0.727
DENS	9.434	14.936	0.160	0.018	0.632	0.532
SQUAREDENS	0.509	0.157	0.822	0.018	3.248	0.003

Analysis of Variance

Source	Sum-of-Squares	df	Mean-Square	F-ratio	P
Regression	2.16217E+07	2	1.08109E+07	413.237	0.000
Residual	863325.419	33	26161.376		

*** WARNING ***
Case 32 is an outlier (Studentized Residual = 4.431)

Durbin-Watson D Statistic 2.707
First Order Autocorrelation -0.373

Abbildung 2: Systat Output für Modell (2)

a) Was schliessen Sie aus der Spalte P (2 Tail) im Output für Modell (2)?

b) Liegt 2 im 95%-Vertrauensintervall für den Parameter γ_1 von Modell (3)?

c) Wie lauten die Schätzungen für die Standardabweichung der Fehler E_i in den 3 Modellen? Weshalb gibt es bei Modell (3) einen ganz anderen Wert als bei den Modellen (1) und (2)?

Bitte wenden!

Dep Var: LOGHARD   N: 36   Multiple R: 0.986   Squared multiple R: 0.973

Adjusted squared multiple R: 0.972   Standard error of estimate: 0.098

Effect	Coefficient	Std Error	Std Coef	Tolerance	t	P(2 Tail)
CONSTANT	0.015	0.204	0.000	.	0.076	0.940
LOGDENS	1.885	0.054	0.986	1.000	35.091	0.000

Analysis of Variance

Source	Sum-of-Squares	df	Mean-Square	F-ratio	P
Regression	11.768	1	11.768	1231.361	0.000
Residual	0.325	34	0.010		

Durbin-Watson D Statistic   2.392
First Order Autocorrelation   -0.223

Abbildung 3: Systat Output für Modell (3)

d) Schreiben Sie das Modell (3) um in eine Beziehung zwischen den ursprünglichen Grössen y_i und x_i (ohne Logarithmen). Worin unterscheidet sich das Modell (2) mit $\beta_0 = \beta_1 = 0$ vom Modell (3) mit $\gamma_1 = 2$?

e) Beurteilen Sie mit Hilfe der Tukey-Anscombe Darstellungen der Residuen gegen angepasste Werte, ob die Modelle (1), bzw. (2), bzw. (3) zu den Daten passen. Welches der drei Modelle würden Sie bevorzugen?

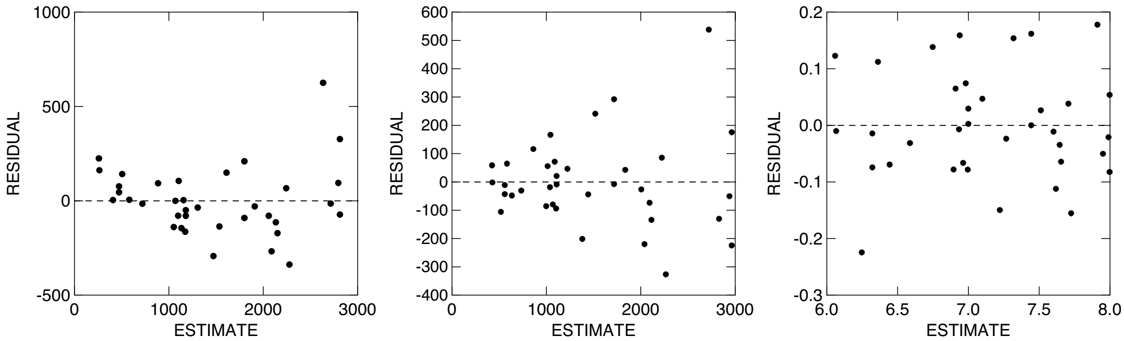


Abbildung 4: Tukey-Anscombe Plots für Modell (1) (links), Modell (2) (Mitte) und Modell (3) (rechts)

Siehe nächstes Blatt!

Quantile der t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden

ν	$q_{0.60}$	$q_{0.70}$	$q_{0.80}$	$q_{0.90}$	$q_{0.95}$	$q_{0.975}$	$q_{0.99}$	$q_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576