Prof. F. Delbaen
D-ITET

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Frühjahr 2004

2. Vordiplom

1. (9 Punkte) Die Herstellung eines Chips erfolgt auf einer Maschine, die nicht immer richtig funktioniert. $p \in (0,1)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass der Chip fehlerhaft produziert wird. Nach der Produktion durchläuft der Chip eine Kontrolle, die fehlerhafte Chips aussortieren soll. Wird beim Chip während der Kontrolle kein Fehler entdeckt, so kommt der Chip in den Verkauf, sonst wird er vernichtet. Leider können bei der Kontrolle folgende Fehler auftreten:

- $q_1 \in (0,1)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass der Chip vernichtet wird, obwohl er nicht fehlerhaft ist.
- $q_2 \in (0,1)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass der Chip in den Verkauf kommt, obwohl er fehlerhaft ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Kontrolle des Chips ein Fehler auftritt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Chip in den Verkauf kommt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Chip fehlerhaft ist, gegeben, dass er im Verkauf ist.

d) Ein Kunde kauft nun eine Lieferung von 100 Chips, die unabhängig von einander nach obigem Schema produziert und kontrolliert worden sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gekaufte Lieferung mehr als zwei fehlerhafte Chips enthält?

2. (11 Punkte) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung $X \sim \mathcal{N}(2, 12)$.

a) Berechnen Sie $P[X^2 > 3]$.

b) Geben Sie die grösste Zahl $c \in \mathbb{R}$ an, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass e^X kleiner als c ist, höchstens 0.02 beträgt.

c) Ermitteln Sie die Dichte der Zufallsvariable $L := \frac{e^X}{1+e^X}$.
Hinweis: Überlegen Sie zuerst, welche Werte L überhaupt annehmen kann.

Bitte wenden!

3. (12 Punkte) An einem Flughafen landet jede Stunde eine zufällige Anzahl Flüge. An Bord jedes Fluges können VIP-Gäste sein, von denen jeder einzeln am Ausgang von einem persönlichen Assistenten abgeholt werden muss. Aus Planungsgründen möchte die Leitung des Flughafens den Personalbedarf modellieren. Die richtige Grösse hierfür sei die stündliche Gesamtzahl der VIP-Gäste, die wir mit Z bezeichnen werden.

Seien

- N: Anzahl Flugmaschinen, die in einer Stunde landen. $N \sim \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
- X_i: Anzahl VIP-Gäste an Bord des i-ten Flugs, $i = 1, \ldots, N$.
  $X_i \sim \text{Pois}(\mu)$ für alle $i \geq 1$, $\mu > 0$.

Ferner seien $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängig. Die Anzahl VIP-Gäste während einer Stunde kann als

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

dargestellt werden, und hängt also sowohl von N als auch von $X_1, X_2, \ldots$ ab. Für $N = 0$ ist Z laut Definition gleich 0.

a) Ermitteln Sie zuerst die Verteilung von $X_1 + \cdots + X_n$ für *festes* $n \geq 1$.
Hinweis: Am einfachsten benutzen Sie charakteristische Funktionen, aber die Aufgabe kann ebenso gut mit der Faltungsformel und Induktion gelöst werden.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass während einer Stunde kein einziger VIP-Gast ankommt.

c) Berechnen Sie die erwartete Anzahl VIP-Gäste während einer Stunde $E(Z)$.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass während der letzten Stunde mehr als zwei Flugmaschinen angekommen sind, gegeben, dass während der letzten Stunde kein einziger VIP-Gast registriert wurde?

Viel Erfolg!