Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Wir betrachten 3 Würfel deren Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten und wie folgt beschiftet sind:

Würfel 1: 6 3 3 3 3 3   Würfel 2: 5 5 5 2 2 2   Würfel 3: 1 1 2 2 3 3.

a) Aus den drei Würfeln werden zwei zufällig gezogen und geworfen. Jedes Paar von Würfeln wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe X der Augenzahlen der zwei geworfenen Würfel 5 beträgt.

b) Wir nehmen an, dass die Summe X der Augenzahlen der zwei geworfenen Würfel 5 beträgt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Würfel 1 gezogen wurde?

c) Bei einem Spiel wird das Vorgehen in **a)** zehn Mal wiederholt: Zwei Würfel aus den dreien werden jeweils zufällig gezogen und geworfen. Sei N die Anzahl der Versuche aus den zehn Wiederholungen, bei welcher die Summe X der Augenzahlen 5 beträgt. Welche Verteilung hat N?

d) Wir werfen nun nur Würfel 1 und Würfel 2. Sei Y_1 die geworfene Augenzahl von Würfel 1 und X die Summe der Augenzahlen von Würfel 1 und Würfel 2. Gib die gemeinsame Verteilung von (Y_1, X) an.

2. (10 Punkte) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{c}\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right), & x < \mu, \\ \frac{1}{c}\exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right), & x \geq \mu, \end{cases}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $b > 0$.

a) i) Welche Werte darf c annehmen, damit f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist?

ii) Berechnen Sie für den Fall $\mu = 0$ die Verteilungsfunktion F_X von X.

b) Wir betrachten die Zufallsvariable $Z = e^X$ für den Fall $\mu = 0$.

i) Finden Sie die Dichte f_Z von Z.

ii) Für welche Werte von b ist der Erwartungswert von $Z = e^X$ endlich?

3. (10 Punkte) Sei X und Y zwei Zufallsvariablen uniform verteilt auf dem Dreieck $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, L] \text{ und } 0 \leq y \leq x/L\}$, wobei L ein positiver Parameter ist.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und die Dichte f_X von X.

b) Sei die Ereignisse $A = \{X \leq L/3\}$ und $B = \{Y/X \leq 1/(2L)\}$.

i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P[A]$ und $P[B]$.

ii) Sind die Ereignisse A und B unabhängig?

c) Wir nehmen nun an, dass der Parameter L *unbekannt* ist und geschätzt werden muss anhand von Daten. Für einen gegebenen Datensatz $x_1, \ldots, x_k$ der Verteilung von X, bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für L.