ETHZ, D-MAVT und RW
Prüfung Herbst 2004
Numerische Mathematik
K. Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Das Integral

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx$$

soll mit der 2-Punkt-Gauss-Quadraturformel mit Stützstellen $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und zugehörigen Gewichten $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ approximiert werden.

a) Wenden Sie die Gaussformel im ganzen Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ an. Halbieren Sie das Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$, und wenden Sie die Gaussformel in beiden Teilintervallen an. Wie gross ist der relative Fehler in den beiden Fällen?

b) Zeigen Sie, dass diese Gaussformel $I = \int_{-1}^{1} p(x)dx$ exakt berechnet für ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 3.

2. Gegeben sei die nichtlineare Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0\,.$$

Die positive Nullstelle x_+ soll mit Fixpunktiteration approximiert werden.

Diese Gleichung kann auch in der Form

$$x = 1 - x^2 \qquad \text{order} \qquad x = \frac{1 + x - x^2}{2}$$

geschrieben werden.

a) Auf welche dieser beiden nichtlinearen Gleichungen kann der Banachsche Fixpunktsatz für alle Startwerte $x_0 \in J = [0, 1]$ angewendet werden (Begründung!).

b) i) Führen Sie in diesem Fall zwei Iterations-Schritte durch mit $x_0 = \frac{1}{2}$.

ii) Berechnen Sie für diesen Fall eine obere Schranke n für die Anzahl der Iterationen $x_{j+1} = F(x_j)$ $(j = 0, 1, \cdots)$, so dass $|x_n - x^*| \leq 10^{-6}$, wobei $x_0 \in J$ beliebiger Startwert in J ist.

3. a) Der Auftriebskoeffizient C eines Flugzeugflügels variiert mit dem Anstellwinkel θ wie folgt:

θ_i	0	2.5	5.00	7.50	10.00
C_i	0.03	0.17	0.37	0.44	0.56

Für diese θ-Werte hängt C linear von θ ab, d.h. es gilt $C(\theta) = a\theta + b$. Bestimmen Sie a und b so, dass

$$\sum_{i=1}^{5} [C(\theta_i) - C_i]^2 \qquad \text{miminal wird.}$$

Lösen Sie dieses Ausgleichsproblem mit Hilfe der Gauss'schen Normalgleichungen.

b) Für ein lineares Ausgleichsproblem

$$Ax - \underline{c} = \underline{r}$$

sei die QR-Zerlegung der Fehlergleichungsmatrix A gegeben als

$$Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 8 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor der Messungen

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Bestimmen Sie die Lösung x dieses Ausgleichsproblems.

4. Legen Sie eine **periodische** Spline-Interpolierende (mit Periode 1) durch die Daten

x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
f_i	-1	0	1	-1

und werten Sie sie aus an der Stelle $x = 0.8$.

5. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung für ein Masse-Feder-System

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

und die Anfangsauslenkung $x(0) = 1$.

a) Wieviele und welche zusätzliche Anfangsbedingungen braucht es, damit dieses Problem eine eindeutige Lösung $x(t)$ besitzt.

b) Setzen Sie alle diese Anfangsbedingungen gleich 1 und $m = 1$, $c = 1$, $k = 2$, und wenden Sie das Heun-Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

auf das Problem an. Bestimmen Sie damit eine Approximation für $x(t)$ an der Stelle $t = h$ mit $h = 0.1$.

6. Gegeben sei das Butcher-Tableau des ϑ-Verfahrens $\begin{array}{c|c} \vartheta & \vartheta \\ \hline & 1 \end{array}$.

   a) Bestimmen Sie die Fehlerordnung des Verfahrens für $\vartheta = 1$.

   b) Skizzieren Sie das Stabilitätsgebiet des Verfahrens für $\vartheta = 1/2$.